

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА И.Г. ПЕТРОВСКОГО»

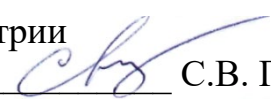
Естественно-научный институт

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа, алгебры и геометрии

УТВЕРЖДАЮ:

Заведующий кафедрой
математического анализа, алгебры
и геометрии

 С.В. Путилов
«14» марта 2022 г.

**ПРОГРАММА
КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА
ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

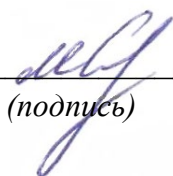
**научная специальность (отрасль науки)
1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика (физико-математические)**

Программа кандидатского экзамена по специальной дисциплине по научной специальности 1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические) / составитель: доктор физико-математических наук, доцент М.М. Сорокина. – Брянск: БГУ, 2022. – 12 с.

Программа составлена в соответствии с Приказом Министерства образования и науки РФ от 28 марта 2014 г. № 247 «Об утверждении Порядка прикрепления лиц для сдачи кандидатских экзаменов, сдачи кандидатских экзаменов и их перечня» (с изменениями и дополнениями).

Программа утверждена на заседании кафедры математического анализа, алгебры и геометрии от «14» марта 2022 г., протокол № 8.

Составитель _____



(подпись)

М.М. Сорокина

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Настоящая программа предназначена для лиц, сдающих кандидатский экзамен по специальной дисциплине по научной специальности 1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические).

Цель кандидатского экзамена – установить глубину профессиональных знаний аспиранта (прикрепленного лица), уровень подготовленности к самостоятельной научно-исследовательской работе.

Настоящая программа определяет порядок проведения кандидатского экзамена по специальной дисциплине в соответствии с научной специальностью.

Задачи:

1. Установить уровень готовности аспиранта (прикрепленного лица) вести научные дискуссии, делать обобщения и формулировать научные выводы.

2. Выявить способности аспиранта (прикрепленного лица) к самостоятельному обучению новым методам, к самостоятельной профессиональной подготовке.

3. Выявить способности аспиранта (прикрепленного лица) проводить самостоятельные научные исследования.

Аспирант (прикрепленное лицо) должен(но):

знать:

- основные положения, результаты, методы современной алгебры, математической логики, теории чисел, дискретной математики;
- основные направления и проблемы современной алгебры, математической логики, теории чисел, дискретной математики.

уметь:

- решать стандартные задачи, доказывать теоремы алгебры, математической логики, теории чисел, дискретной математики;
- применять методы генерирования новых идей при решении научно-исследовательских задач.

владеть:

- навыками использования методов математических рассуждений для решения задач современной алгебры, математической логики, теории чисел, дискретной математики;
- навыками использования методов доказательств, необходимых для решения научно-исследовательских задач в области современной алгебры.

2. СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

Раздел 1. Алгебра

Тема 1. Элементы теории групп. Группа. Подгруппа. Критерий подгруппы. Произведение подмножеств группы. Модулярное тождество Дедекинда. Смежные классы. Свойства смежных классов. Разложение группы по подгруппе. Теорема Лагранжа. Теорема о мощности произведения подгрупп. Нормальные подгруппы. Свойства нормальных подгрупп. Простая группа. Минимальная нормальная подгруппа группы. Факторгруппы. Порождающие множества. Максимальные подгруппы группы. Подгруппа Фраттини. Циклическая подгруппа группы. Циклические группы. Гомоморфизмы групп. Простейшие свойства гомоморфизмов. Теоремы о гомоморфизмах. Эндоморфизмы и автоморфизмы групп. Внешние и внутренние автоморфизмы групп. Свойства группы всех внутренних автоморфизмов данной группы. Совершенная группа. Допустимые подгруппы группы. Характеристические и вполне характеристические подгруппы группы. Свойства характеристических подгрупп. Простые и характеристически простые группы. Коммутаторы элементов группы. Свойства коммутаторов элементов. Взаимный коммутант подмножеств группы и его свойства. Коммутант группы. Прямые произведения групп (внешние и внутренние). Свойства прямых произведений групп. Полупрямые произведения. Подпрямые произведения. Теорема Ремака о подпрямых произведениях групп. Нормализатор и централизатор подмножества в группе, их свойства. Централизатор элемента в группе. Центр группы и его свойства. Формула классов. Примарные группы и их свойства. Силовские подгруппы группы. Теоремы Силова. Свойства силовских подгрупп в группах. Лемма Фраттини. Ряды подгрупп: нормальный, субнормальный, главный, композиционный. Свойства главных и композиционных факторов группы. Теоремы Шрейера и Жордана-Гёльдера. Разрешимые группы и их простейшие свойства. Признаки разрешимости конечных групп. Дополняемые и добавляемые подгруппы в группах. Обобщение силовских теорем в разрешимых группах. π -свойства конечных групп. Конечные нильпотентные группы и их свойства. Разрешимость нильпотентной группы. Нильпотентность и другие свойства подгруппы Фраттини. Подгруппа Фиттинга группы и ее свойства. Сверхразрешимые группы и их свойства. Разрешимость сверхразрешимой группы. Сверхразрешимость нильпотентной группы. Признаки сверхразрешимости групп.

Тема 2. Элементы теории колец, полей, модулей, алгебр над полем. Кольца и их виды. Идеалы колец и операции над ними. Свойства главных идеалов. Делимость идеалов. Евклидовы кольца. Кольца главных идеалов. Факториальные кольца. Теорема о факториальности кольца главных идеалов. Гомоморфизмы и изоморфизмы колец. Фактор-кольца. Простые и полупростые кольца. Кольца с условием минимальности. Поля и их виды. Расширения полей: простые, простые алгебраические, простые трансцендентные, алгебраические, алгебраически порожденные, конечные, составные алгебраические расширения

поля. Простота составного алгебраического расширения поля. Поле разложения многочлена. Нормальные расширения полей. Автоморфизмы полей, группа Галуа поля. Модули и их виды. Операции над модулями. Гомоморфизмы модулей. Фактор-модули. Условия конечности для модулей. Неприводимые модули. Точные, неразложимые, вполне приводимые модули. Алгебры над полем. Гиперкомплексные системы. Тело кватернионов. Теорема Фробениуса.

Раздел 2. Математическая логика

Тема 1. Алгебра высказываний. Высказывания, формулы алгебры высказываний. Законы алгебры высказываний. Основные равносильности. Закон двойственности. Нормальные формы. Логическое следствие. Правила логического вывода в алгебре высказываний. Булевы функции. Представление истинностных функций формулами алгебры высказываний. Полные системы булевых функций. Проблема разрешения в алгебре высказываний.

Тема 2. Алгебра предикатов. Предикаты, предикатные формулы. Основные равносильности. Нормальная форма и предваренная нормальная форма. Общезначимость и выполнимость формул. Проблема разрешения для общезначимости и выполнимости, неразрешимость ее в общем случае. Алгоритмы распознавания общезначимости формул в частных случаях.

Тема 3. Исчисление высказываний. Формальные аксиоматические теории. Исчисление высказываний. Язык. Аксиомы. Правила вывода. Доказуемость формул. Выводимость из гипотез. Правила выводимости. Теорема дедукции. Теоремы исчисления высказываний. Непротиворечивость, полнота, разрешимость исчисления высказываний, независимость системы аксиом.

Тема 4. Исчисление предикатов. Непротиворечивость исчисления предикатов. Язык первого порядка. Термы и формулы. Логические и специальные аксиомы. Правила вывода. Доказательство в теории. Производные правила вывода. Теорема дедукции. Проблемы непротиворечивости, полноты, разрешимости теорий. Интерпретация языка теорий. Истинностные значения формул в интерпретации. Модель теории. Изоморфизм. Категоричность теорий. Теорема полноты. Теория натуральных чисел. Язык. Специальные аксиомы. Теоремы Геделя о неполноте.

Раздел 3. Теория чисел

Тема 1. Делимость в кольце целых чисел. Отношение делимости в кольце целых чисел. Теорема о делении с остатком. Алгоритм Евклида. Взаимно простые числа. Бесконечность множества простых чисел. Разложение целых чисел на простые множители и его единственность. Распределение простых чисел в натуральном ряду, неравенства Чебышева. Аксиоматический закон распределения простых чисел в натуральном ряду. Разложение $n!$ на простые множители. Систематические числа. Конечные цепные дроби.

Тема 2. Элементы теории сравнений. Сравнение в кольце целых чисел. Кольцо классов вычетов. Поле классов вычетов по простому модулю. Сравнения с одной неизвестной величиной. Сравнения первой степени. Неопределенные уравнения первой степени с двумя неизвестными. Системы сравнений первой степени. Сравнения любой степени по простому и составному модулю. Порядки чисел и классов вычетов по данному модулю. Индексы классов по данному модулю. Показательные сравнения. Закон взаимности. Двучленные сравнения по простому модулю. Квадратичные вычеты и невычеты. Символ Лежандра. Конечные и бесконечные систематические дроби.

Тема 3. Представления действительных чисел. Бесконечные цепные дроби. Представление действительных чисел цепными дробями. Теорема Лежандра о квадратичной иррациональности. Приближения действительных чисел подходящими дробями. Теорема Дирихле. Приближение действительных чисел бесконечной последовательностью рациональных чисел. Отыскание наилучших приближений с помощью цепных дробей. Множество всех наилучших приближений к заданному действительному числу. Алгебраические и трансцендентные числа. Теорема Лиувилля.

3. ВОПРОСЫ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

1. Группа. Подгруппа. Критерий подгруппы. Произведение подмножеств группы. Модулярное тождество Дедекинда. Смежные классы. Свойства смежных классов. Разложение группы по подгруппе. Теорема Лагранжа. Теорема о мощности произведения подгрупп.
2. Нормальные подгруппы. Свойства нормальных подгрупп. Простая группа. Минимальная нормальная подгруппа группы. Факторгруппы.
3. Порождающие множества. Максимальные подгруппы группы. Подгруппа Фраттини. Циклическая подгруппа группы. Циклические группы.
4. Гомоморфизмы групп. Простейшие свойства гомоморфизмов. Теоремы о гомоморфизмах. Эндоморфизмы и автоморфизмы групп. Внешние и внутренние автоморфизмы групп. Свойства группы всех внутренних автоморфизмов данной группы. Совершенная группа.
5. Допустимые подгруппы группы. Характеристические и вполне характеристические подгруппы группы. Свойства характеристических подгрупп. Простые и характеристически простые группы.
6. Коммутаторы элементов группы. Свойства коммутаторов элементов. Взаимный коммутант подмножеств группы и его свойства. Коммутант группы.
7. Прямые произведения групп (внешние и внутренние). Свойства прямых произведений групп. Полупрямые произведения. Подпрямые произведения. Теорема Ремака о подпрямых произведениях групп.
8. Нормализатор и централизатор подмножества в группе, их свойства. Централизатор элемента в группе. Центр группы и его свойства. Формула классов.

9. Примарные группы и их свойства. Силоские подгруппы группы. Теоремы Силова. Свойства силоских подгрупп в группах. Лемма Фраттини.
10. Ряды подгрупп: нормальный, субнормальный, главный, композиционный. Свойства главных и композиционных факторов группы. Теоремы Шрейера и Жордана-Гёльдера.
11. Разрешимые группы и их простейшие свойства. Признаки разрешимости конечных групп.
12. Дополняемые и добавляемые подгруппы в группах. Обобщение силоских теорем в разрешимых группах. π -свойства конечных групп.
13. Конечные нильпотентные группы и их свойства. Разрешимость нильпотентной группы. Нильпотентность и другие свойства подгруппы Фраттини. Подгруппа Фиттинга группы и ее свойства.
14. Сверхразрешимые группы и их свойства. Разрешимость сверхразрешимой группы. Сверхразрешимость нильпотентной группы. Признаки сверхразрешимости групп.
15. Кольцо. Идеалы колец и операции над ними. Свойства главных идеалов. Делимость идеалов.
16. Евклидовы кольца. Кольца главных идеалов. Факториальные кольца.
17. Гомоморфизмы и изоморфизмы колец. Фактор-кольцо.
18. Простые и полупростые кольца. Кольца с условием минимальности.
19. Поля и их виды. Характеристика поля. Поле Галуа.
20. Простые расширения полей. Простые и трансцендентные элементы над полем. Простые алгебраические расширения полей.
21. Алгебраические расширения полей. Алгебраически порожденные расширения полей.
22. Конечные расширения полей. Двойное конечное расширение поля. Составное конечное расширение поля.
23. Составные алгебраические расширения поля. Простота составного алгебраического расширения поля.
24. Поле разложения многочлена. Нормальное расширение поля. Автоморфизмы полей. Группа Галуа поля.
25. Модуль. Подмодули. Виды модулей. Гомоморфизмы модулей. Фактор-модули.
26. Условия конечности для модулей. Неприводимые модули. Точные, неразложимые модули. Вполне приводимые модули.
27. Алгебры над полем. Гиперкомплексные системы. Тело кватернионов. Теорема Фробениуса.
28. Высказывания, формулы алгебры высказываний. Законы алгебры высказываний. Основные равносильности. Закон двойственности. Нормальные формы. Логическое следствие. Правила логического вывода в алгебре высказываний.
29. Булевы функции. Представление истинностных функций формулами алгебры высказываний. Полные системы булевых функций.
30. Проблема разрешения в алгебре высказываний.

31. Предикаты, предикатные формулы. Основные равносильности. Нормальная форма и предваренная нормальная форма. Общезначимость и выполнимость формул.
32. Проблема разрешения для общезначимости и выполнимости, неразрешимость ее в общем случае. Алгоритмы распознавания общезначимости формул в частных случаях.
33. Формальные аксиоматические теории. Исчисление высказываний (ИВ). Язык, аксиомы, правила вывода ИВ. Доказуемость формул в ИВ. Выводимость из гипотез в ИВ. Правила выводимости ИВ.
34. Теорема дедукции в ИВ. Теоремы исчисления высказываний.
35. Непротиворечивость, полнота, разрешимость исчисления высказываний, независимость системы аксиом.
36. Исчисление предикатов (ИП). Непротиворечивость исчисления предикатов. Язык первого порядка ИП. Термы и формулы ИП. Логические и специальные аксиомы ИП. Правила вывода ИП. Доказательство в теории. Производные правила вывода ИП. Теорема дедукции в ИП.
37. Проблемы непротиворечивости, полноты, разрешимости теорий. Интерпретация языка теорий. Истинностные значения формул в интерпретации. Модель теории. Изоморфизм. Категоричность теорий.
38. Теорема полноты. Теория натуральных чисел: язык, специальные аксиомы. Теоремы Геделя о неполноте.
39. Отношение делимости в кольце целых чисел. Теорема о делении с остатком. Алгоритм Евклида. Взаимно простые числа. Бесконечность множества простых чисел. Разложение целых чисел на простые множители и его единственность.
40. Распределение простых чисел в натуральном ряду, неравенства Чебышева. Аксиоматический закон распределения простых чисел в натуральном ряду. Разложение $n!$ на простые множители. Систематические числа. Конечные цепные дроби.
41. Сравнение в кольце целых чисел. Кольцо классов вычетов. Поле классов вычетов по простому модулю.
42. Сравнения с одной неизвестной величиной. Сравнения первой степени. Неопределенные уравнения первой степени с двумя неизвестными.
43. Системы сравнений первой степени. Сравнения любой степени по простому и составному модулю.
44. Порядки чисел и классов вычетов по данному модулю. Индексы классов по данному модулю. Показательные сравнения.
45. Закон взаимности. Двучленные сравнения по простому модулю. Квадратичные вычеты и невычеты. Символ Лежандра.
46. Конечные и бесконечные систематические дроби. Бесконечные цепные дроби. Представление действительных чисел цепными дробями.
47. Теорема Лежандра о квадратичной иррациональности.
48. Приближения действительных чисел подходящими дробями. Теорема Дирихле.

49. Приближение действительных чисел бесконечной последовательностью рациональных чисел. Отыскание наилучших приближений с помощью цепных дробей.
50. Множество всех наилучших приближений к заданному действительному числу. Алгебраические и трансцендентные числа. Теорема Лиувилля.

4. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К КАНДИДАТСКОМУ ЭКЗАМЕНУ

Основная литература:

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры. – М.: Физико-математическая литература, 2000.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра. – М.: Физико-математическая литература, 2000.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры алгебры. – М.: Физико-математическая литература, 2000.
4. Игошин В.Н. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: Академия, 2008.
5. Бухштаб А.А. Теория чисел. – СПб: Лань, 2008.
6. Курош А.Г. Основы высшей алгебры. – СПб.: Лань, 2011.
7. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – СПб.: Лань, 2007.
8. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – СПб: Лань, 2008.
9. Кострикин А.И. Сборник задач по алгебре. – М.: Физико-математическая литература, 2001.
10. Нестеренко Ю.В. Теория чисел. – М.: Академия, 2008.
11. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. – М.: Академия, 2007.

Дополнительная литература:

1. Курош А.Г. Теория групп. – М.: Физико-математическая литература, 2005.
2. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: учебное пособие. – Мн.: Вышэйшая школа, 2006.
3. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М.: Наука, 1982 (Издательство «Лань», 2009).
4. Лихтарников Л.М., Сухачева Т.Г. Математическая логика. – СПб: Лань, 2008.

Периодические издания:

1. Алгебра и логика;
2. Вестник МГУ. Серия «Математика»;
3. Дискретная математика;
4. Доклады Академии наук;
5. Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Математика и физика»;
6. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика;
7. Математические заметки;

8. Математический сборник;
9. Математические труды;
10. Сибирский математический журнал;
11. Труды Математического института имени В. А. Стеклова;
12. Труды Института математики и механики УрО РАН.

Интернет-ресурсы:

1. Математический сайт [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.math.ru>.
2. Общероссийский математический портал [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mathnet.ru>.
3. Научная электронная библиотека [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.elibrary.ru>.
4. Образовательный математический сайт Exponenta.ru [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.exponenta.ru>.
5. Естественно-научный образовательный портал [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://en.edu.ru>.
6. Физико-математический ресурс [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://eqworld.ipmnet.ru>.
7. Электронная библиотека BookFinder [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.bookfi.org>.
8. Математика на страницах WWW [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.nsc.ru/win/mathpub/math_www.html.

5. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

Кандидатский экзамен проводится по билетам. Для подготовки ответа экзаменуемый использует экзаменационные листы.

На каждого экзаменуемого заполняется протокол приема кандидатского экзамена, в который вносятся вопросы билетов и вопросы, заданные членами комиссии.

Экзаменационные билеты должны включать два вопроса в соответствии с разделами программы кандидатского экзамена и один вопрос в соответствии с разделами дополнительной программы.

Уровень знаний оценивается на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка	Описание критериев оценки
«ОТЛИЧНО»	– грамотно использована научная терминология; – четко сформулирована проблема, доказательно аргументированы выдвигаемые тезисы; – указаны основные точки зрения, принятые в научной литературе по рассматриваемому вопросу; – аргументирована собственная позиция или точка зрения, обозначены наиболее значимые в данной

	области научно-исследовательские проблемы; – умение проводить междисциплинарные связи, связывая теоретические положения сообщения с профессиональной деятельностью.
«хорошо»	– применяется научная терминология, но при этом допущена ошибка или неточность в определениях, понятиях; – проблема сформулирована, в целом доказательно аргументированы выдвигаемые тезисы; – имеются недостатки в аргументации, допущены фактические или терминологические неточности, которые не носят существенного характера; – высказано представление о возможных научно-исследовательских проблемах в данной области; – аргументирована собственная позиция или точка зрения, обозначены наиболее значимые в данной области научно-исследовательские проблемы.
«удовлетворительно»	– названы и определены лишь некоторые основания, признаки, характеристики рассматриваемой проблемы; – допущены существенные терминологические неточности; – имеются существенные недостатки в аргументации, допущены фактические или терминологические неточности; – не высказано представление о возможных научно-исследовательских проблемах в данной области; – частично аргументирована собственная позиция или точка зрения, обозначены наиболее значимые в данной области научно-исследовательские проблемы.
«неудовлетворительно»	– отмечается отсутствие знания терминологии, научных оснований, признаков, характеристик рассматриваемой проблемы; – не представлена собственная точка зрения по данному вопросу.

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ ПРОГРАММЫ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

1. Разработана:

Составитель _____ /Сорокина М.М./
(подпись)

«10» марта 2022 г.

2. Одобрена и рекомендована кафедрой математического анализа, алгебры и геометрии

Протокол № 8 от «14» марта 2022 г.

Заведующий кафедрой _____ /Путилов С.В./
(подпись)

3. Одобрена и рекомендована учёным советом физико-математического факультета

Протокол № 6 от «25» марта 2022 г.

Декан факультета _____ /Савин А.В./
(подпись)