

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА И.Г. ПЕТРОВСКОГО»

Естественно-научный институт

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа, алгебры и геометрии

УТВЕРЖДАЮ:

Директор естественно-научного  
института



В.И. Горбачев

«27» сентября 2022 г.

## **ПРОГРАММА**

**вступительного испытания по специальности основной  
образовательной программы высшего образования – программы  
подготовки научных и научно-педагогических кадров  
в аспирантуре**

**научная специальность (отрасль науки)**

**1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ  
(физико-математические науки)**

**Программа вступительного испытания по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки) основной образовательной программы высшего образования – программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре / составитель: кандидат физико-математических наук, доцент Беднаж В.А. – Брянск: БГУ, 2022. – 10 с.**

Программа составлена в соответствии с Приказом Министерства науки и высшего образования РФ от 6 августа 2021 г. № 721 «Об утверждении Порядка приема на обучение по образовательным программам высшего образования – программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре».

Программа утверждена на заседании кафедры математического анализа, алгебры и геометрии от «26» сентября 2022 г., протокол № 2.

Составитель

  
\_\_\_\_\_  
(подпись)

В.А. Беднаж

## 1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Программа вступительного испытания сформирована на основе федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования по программам магистратуры<sup>1</sup>.

### **Цель вступительного испытания:**

– определить готовность и возможность поступающего освоить выбранную программу аспирантуры и выявить научные интересы и потенциальные возможности в сфере будущей научно-исследовательской работы.

### **Задачи:**

– оценка уровня готовности поступающих в аспирантуру к самостоятельному обучению новым методам и исследовательским практикам, самостоятельной профессиональной подготовке и освоению смежных областей знания;

– выявление способности у поступающих в аспирантуру проводить самостоятельные научные исследования;

– выявление способности у поступающих в аспирантуру вести научные дискуссии, делать обобщения и формулировать научные выводы.

### **Поступающий в аспирантуру должен:**

знать: закономерности современного научного знания, исследовательской деятельности; основы осуществления научного исследования с использованием современных методов комплексного анализа.

уметь: выделять научную область, проблему, идею исследования и ее технологический продукт; самостоятельно осуществлять научное исследование с использованием современных методов комплексного анализа.

владеть: основными методами исследования научных проблемы комплексного анализа; навыками ответственного отношения к результатам своей профессиональной деятельности; способами осуществления научного исследования в области комплексного анализа.

## 2. СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

### **1. Непрерывность функции одной переменной. Теоремы о непрерывных функциях.**

Понятие функции одной переменной, определение непрерывности функции (по Гейне, по Коши, в терминах приращения), односторонняя

---

<sup>1</sup> Правила приема в федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского» на обучение по образовательным программам высшего образования – программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре в 2023 году

непрерывность, необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке, арифметические операции над непрерывными функциями, основные элементарные функции, сложная функция и ее непрерывность, 1 и 2 теорема Больцано-Коши о непрерывных функциях на отрезке, 1 и 2 теорема Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях.

**2. Функции многих переменных. Полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Теорема о смешанных производных.**

Пространство  $R^n$ . Понятие функции  $n$  переменных. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость и полный дифференциал, его геометрический смысл. Дифференцируемость сложной функции нескольких переменных. Производные высших порядков. Теорема Шварца о равенстве смешанных производных.

**3. неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.**

Понятие о неявной функции одной и двух переменных. Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции. Непрерывность неявной функции.

**4. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Теорема о среднем.**

Понятие определенного интеграла, геометрический смысл. Формула Ньютона-Лейбница. Необходимое условие интегрируемости функции, достаточное условие интегрируемости. Теорема о среднем для интегралов.

**5. Числовые ряды. Критерий Коши. Достаточные признаки сходимости. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана.**

Определение числового ряда. Критерий Коши сходимости числового ряда. Признаки сходимости числовых рядов. Знакопередающийся ряд. Понятие абсолютной и условной сходимости. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана.

**6. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов.**

Определение функционального ряда. Понятие равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса для равномерной сходимости. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.

**7. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Свойства степенных рядов. Ряды Тейлора. Разложение аналитической функции в степенной ряд.**

Понятие степенного ряда. Радиус сходимости. Формула Коши-Адамара для определения радиуса сходимости. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Ряд Тейлора. Разложение аналитической функции в степенной ряд.

**8. Ортогональные системы функций. Неравенство Бесселя. Условия полноты. Ряды Фурье. Достаточные условия представимости рядами Фурье.**

Скалярное произведение. Понятие ортогональной системы. Определение ряда Фурье. Равенство Бесселя. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Тригонометрические ряды Фурье. Теорема о достаточном условии представимости функции рядом Фурье.

**9. Функции ограниченной вариации. Принцип выбора Хелли. Интеграл Стильтьеса.**

Определение и свойства функций ограниченной вариации. Принцип выбора Хелли. Определение и свойства интеграла Стильтьеса. Формула интегрирования по частям.

**10. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Основные свойства интеграла Лебега.**

Измеримые функции. Определение и свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Теорема о среднем.

**11. Суммируемые функции. Лемма Фату, Леви. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теоремы Лебега.**

Понятие суммируемой функции. Разные типы сходимости. Сходимость почти всюду. Лемма Фату, Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теоремы Лебега.

**12. Спектр. Резольвента линейного оператора.**

Понятие линейного оператора в нормированном пространстве, норма оператора. Ограниченность и непрерывность. Понятие обратного оператора. Понятие спектра и резольвенты оператора. Их основные свойства.

**13. Преобразование Фурье в  $L_1$  и  $L_2$ . Теорема Планшереля.**

Понятие преобразований Фурье  $L_1$  и  $L_2$ . Их свойства.

#### **14. Нормированные и банаховы пространства. Основные принципы линейного анализа**

Теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, Банаха об обратном операторе.

#### **15. Комплексная дифференцируемость. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие о конформном отображении.**

Производная функции комплексной переменной. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие о конформном отображении, его свойства.

#### **16. Интегрирование аналитических функций. Интегральная теорема Коши и формула Коши.**

Интеграл в комплексной области, его свойства. Интегральная теорема Коши для простого и составного контура. Интегральная формула Коши. Теорема Морера.

#### **17. Основные теоремы теории аналитических функций: теоремы Лиувилля, единственности, Вейерштрасса, принцип максимума модуля, лемма Шварца.**

Теорема о среднем для аналитических функций. Понятие целой функции. Теорема Лиувилля. Классическая теорема единственности для аналитических в области функций (эквивалентные формулировки). Принцип максимума для аналитических функций. Лемма Шварца.

#### **18. Ряд Лорана. Изолированные особые точки. Целые и мероморфные функции. Разложение целой функции в произведение.**

Определение ряда Лорана. Теорема Лорана. Изолированные особые точки функции, их классификация. Понятие целой и мероморфной функции. Теорема Вейерштрасса о разложении целой функции в бесконечное произведение.

#### **19. Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Принцип аргумента. Теорема Руше.**

Понятие вычета функции в точке. Теорема Коши о вычетах. Принцип аргумента. Теорема Руше.

#### **20. Гармонические функции. Интеграл Пуассона. Задача Дирихле для круга и ее решение.**

Определение гармонической функции в точке. Принцип максимума для гармонических функций. Задача Дирихле для круга и ее решение. Интеграл Пуассона. Основные свойства ядра Пуассона.

**21. Представление гармонических функций в виде степенного ряда, формула Пуассона. Классы  $H^p$  в круге и их представление.**

Разложение гармонической функции в степенной ряд. Формула Пуассона-Иенсена. Классы Харди. Факторизационное представление классов  $H^p$  в круге.

**22. Граничные свойства гармонических функций, представленных в виде интеграла Пуассона. Теорема Фату.**

Представление гармонической функции в виде интеграла Пуассона. Теорема Фату для гармонических функций.

**23. Гармонически сопряженные функции, их граничное поведение.**

Понятие гармонически сопряженных функций. Основные свойства гармонически сопряженных функций.

**24. Теорема Риссов. Теорема единственности для функций из класса  $H^1$ .**

Классы Харди. Теорема Риссов. Теорема единственности для функций из класса  $H^1$ .

### **3. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ВСТУПИТЕЛЬНОМУ ИСПЫТАНИЮ**

**Основная литература:**

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н., Лекции по математическому анализу, М., Дрофа, 2004.

2. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа в 2-х т. – 7-е изд., стер. – Москва: Физматлит, 2009. – (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 1). – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=76686> – ISBN 978-5-9221-0902-4. – Текст: электронный.

3. Никольский С.М. Курс математического анализа в 2-х т. – 6-е изд., стереотип. – Москва: Физматлит, 2001. – 592 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69500> – ISBN 978-5-9221-0160-8. – Текст: электронный.

4. Зорич В.А., Математический анализ. Т. 1, 2. – М.: МЦНМО, 2007.

5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – СПб: Лань, 2009.

6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., элементы теории функций и функционального анализа. – М., Физматлит, 2004.

7. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций в 2-х тт. Т.1, 2. – СПб: Лань, 2009.

8. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Высшая школа, 1999.

9. Кусис П. Введение в теорию пространств  $H^p$ . – М.: Мир, 1984.

#### **Дополнительная литература:**

1. Маркушевич, А.И. Теория аналитических функций / А.И. Маркушевич. – Москва: Наука, 1968. – Т. 2. Дальнейшее построение теории. – 626 с.: ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=439146> – Текст: электронный

2. Чуешев, В.В. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие : [16+] / В.В. Чуешев, Н.А. Чуешева ; Министерство образования и науки РФ, Кемеровский государственный университет. – Изд. 2-е, исп. и доп. – Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2016. – Ч. 4. Конформные отображения. – 134 с.: схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=481497> – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-8353-1897-1. - ISBN 978-5-8353-1905-3 (Ч. 4). – Текст: электронный.

3. Steven G.Krantz Geometric function theory, Explorations in Complex analysis Birkhäuser, Boston, Berlin, 2005.

#### **Периодические издания:**

Доклады РАН, «Математические заметки», «Математический сборник», «Успехи математических наук», Сибирский математический журнал, «Алгебра и Анализ»

#### **Интернет-ресурсы**

<http://semr.math.nsc.ru/indexru.html>

<http://www.math.net.ru/>

## **5. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ**

Вступительный экзамен осуществляется в форме устного опроса по экзаменационному билету, включающему два вопроса.

На подготовку к ответу экзаменуемому предоставляется 45 минут.

Вступительное испытание оценивается по 100-балльной шкале. Вопросы вступительного экзамена оцениваются предметной комиссией отдельно. Итоговая оценка за экзамен определяется на основании среднего арифметического значения баллов, набранных абитуриентом по каждому из вопросов. Все вопросы, касающиеся несогласия абитуриентов с полученными оценками, решаются апелляционной комиссией.



В ходе проведения вступительных испытаний абитуриенту запрещается использовать средства мобильной связи, учебные пособия и иную учебную литературу.

Минимальное количество баллов на вступительных испытаниях составляет 70 баллов. Если абитуриент получает от 0 до 69 баллов, то результат вступительных испытаний признается неудовлетворительным, положительный результат определяется диапазоном от 70 до 100 баллов.

При определении соответствия уровня подготовленности абитуриента требованиям, предъявляемым к нему программой вступительных испытаний, комиссия руководствуется следующими критериями оценки:

<b>Количество баллов</b>	<b>Описание критериев оценки</b>
<b>0 – 69</b>	Абитуриент демонстрирует плохое знание существа вопросов билета, плохо усвоил положения источников и рекомендованной литературы, не способен обобщить материал, делает поверхностные выводы, при ответе использует научные термины и понятия в недостаточном объеме. С трудом приводит практические примеры, подтверждающие теоретические положения. На дополнительные вопросы отвечает частично, с большим количеством неточностей.
<b>70 – 80</b>	Абитуриент демонстрирует удовлетворительное знание существа вопросов билета, усвоил основные положения источников рекомендованной литературы, способен обобщить материал, допуская при этом несущественные ошибки, делает поверхностные выводы, при ответе использует научные термины и понятия в недостаточном объеме. С трудом приводит практические примеры, подтверждающие теоретические положения. На дополнительные вопросы отвечает частично, допуская неточности.
<b>81 – 90</b>	Абитуриент демонстрирует хорошее знание существа вопросов билета, усвоил основные положения источников и рекомендованной литературы, способен обобщить материал, делает самостоятельные выводы, при ответе использует научные термины и понятия. Приводит практические примеры. Подтверждающие теоретические положения. На дополнительные вопросы экзаменатор отвечает достаточно свободно, допуская некоторые неточности, которые сам исправляет после замечания экзаменатора.

<b>91 – 100</b>	Абитуриент в своем ответе демонстрирует отличное знание существа вопроса, свободно ориентируется в основных концепциях и теориях по данному вопросу, приводит их критический анализ и сопоставление, описанные теоретические положения иллюстрирует практическими примерами. Абитуриентом формулируется и обосновывается собственная точка зрения на заявленные проблемы, материал излагается профессиональным языком с использованием соответствующей системы понятий и терминов.
-----------------	--

## ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ ПРОГРАММЫ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ


### 1. Разработана:

Составитель \_\_\_\_\_  /Беднаж В.А./  
(подпись)

«25» сентября 2022 г.


### 2. Одобрена и рекомендована кафедрой математического анализа, алгебры и геометрии

Протокол № 2 от «26» сентября 2022 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  /Путилов С.В./  
(подпись)

### 3. Одобрена и рекомендована учёным советом физико- математического факультета

Протокол № 2 от «27» сентября 2022 г.

Декан факультета \_\_\_\_\_  /Савин А.В./  
(подпись)