

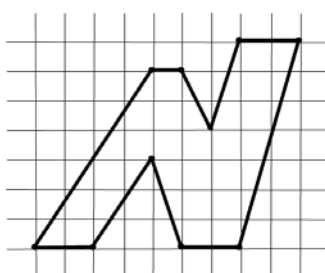
МАТЕМАТИКА

Заочный тур

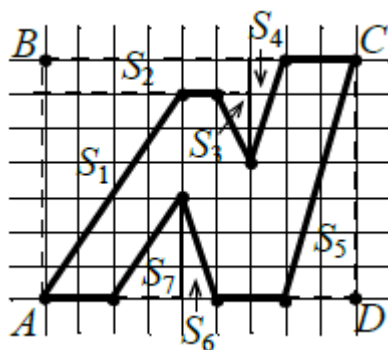
2018 - 2019 г.

8 класс

1. Найти площадь многоугольника, изображённого на рис., если площадь клетки равна 1.



Решение.



Выделим наименьший прямоугольник ABCD, в котором лежит наша фигура. Площадь прямоугольника ABCD равна 7×9 клеток, т. е. равна 63. Считаем площади треугольников

$$S_1=12 \cdot 6 \cdot 4=12 \text{ кл}, \quad S_3=12 \cdot 1 \cdot 2=1 \text{ кл}, \quad S_4=12 \cdot 1 \cdot 3=3 \text{ кл}.$$

$$S_5=12 \cdot 2 \cdot 7=7 \text{ кл}, \quad S_6=12 \cdot 1 \cdot 3=3 \text{ кл}, \quad S_7=12 \cdot 2 \cdot 3=3 \text{ кл},$$

и площадь четырёхугольника $S_2=1 \cdot 6=6$ кл, которые лежат вне фигуры, но внутри четырёхугольника ABCD.

$$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7=(12+1+3+7+3+3+6) \text{ кл}=35 \text{ кл}.$$

Находим $S_{\text{исх}} = 63 - 32 = 31$.

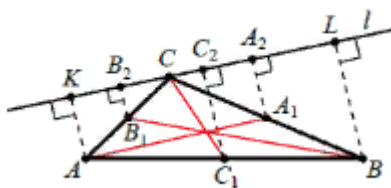
2. Найдите остаток от деления 2017^{2018} на 7.

Решение.

При делении на 7 число 2017 дает остаток 1. Значит, для того, чтобы найти остаток от деления 2017^{2018} на 7, надо найти остаток от деления 1^{2018} на 7, а это 1. Значит, остаток от деления 2017^{2018} на 7 равен 1.

3. Через вершину тупого угла C треугольника ABC проведена во вне его прямая. Проекции сторон AC и BC на эту прямую соответственно равны 2 и 4. Найти сумму проекций трёх медиан треугольника на эту же прямую.

Решение.



Проведём три медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 , и на прямую l опустим перпендикуляры AK , BL , A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 . По условию $CK=2$ и $CL=4$.

Отрезок A_1A_2 - проходит через середину стороны BC и $A_1A_2 \parallel BL$ (так как $A_1A_2 \perp l$ и $BL \perp l$), по теореме Фалеса $CA_2 = A_2L = \frac{1}{2}CL = 2$. Проекция медианы AA_1 равна $KA_2 = KC + CA_2 = 4$.

Аналогично устанавливаем, что точка B_2 делит пополам отрезок CK , $CB_2 = \frac{1}{2}CK = 1$. Проекция медианы BB_1 есть отрезок $LB_2 = CB_2 + CL = 1 + 4 = 5$.

Проекция медианы CC_1 есть отрезок CC_2 ; точка C_1 - середина стороны AB , $C_1C_2 \parallel AK$ и $C_1C_2 \parallel BL$, т. е. отрезок C_1C_2 есть средняя линия прямоугольной трапеции $BAKL$, точка C_2 - середина её стороны KL , поэтому $CC_2 = CL - \frac{1}{2}KL = 4 - 3 = 1$.

Сумма проекций на прямую l всех медиан равна $4 + 5 + 1 = 10$.

4. Некто измерил длину и ширину прямоугольника. Он умножил целую часть длины на целую часть ширины и получил 48; умножил целую часть длины на дробную часть ширины и получил 3,2; умножил дробную часть длины на целую часть ширины и получил 1,5. Определите площадь прямоугольника.

Решение.

Пусть a, b – длины сторон прямоугольника. Тогда

$$[a] \cdot [b] = 48, \quad [a] \cdot \{b\} = 3,2, \quad \{a\} \cdot [b] = 1,5.$$

$$a \cdot [b] = ([a] + \{a\}) \cdot [b] = [a] \cdot [b] + \{a\} \cdot [b] = 48 + 1,5 = 49,5,$$

$$b \cdot [a] = ([b] + \{b\}) \cdot [a] = [b] \cdot [a] + \{b\} \cdot [a] = 48 + 3,2 = 51,2.$$

$$\text{Тогда } a \cdot [b] \cdot b \cdot [a] = 49,5 \cdot 51,2 \Rightarrow$$

$$S = a \cdot b = \frac{49,5 \cdot 51,2}{[b] \cdot [a]} = \frac{49,5 \cdot 51,2}{48} = 52,8.$$

5. В саду растут яблони, груши и сливы. Известно, что количество яблонь в 6 раз больше количества груш, а количество слив кратно количеству груш. Если количество слив увеличить в 7 раз, то оно превзойдёт количество яблонь на 33. Сколько всего деревьев в этом фруктовом саду?

Решение.

Пусть x – количество груш. Тогда $6x$ – количество яблонь и $k \cdot x$ – количество слив, где $k \in \mathbb{N}$. По условию $7 \cdot k \cdot x = 6x + 33$. Следовательно, $x \cdot (7k - 6) = 33$.

Возможны следующие случаи:

$$1) \begin{cases} x = 1, \\ 7k - 6 = 33, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ k = \frac{39}{7} \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = 33, \\ 7k - 6 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 33, \\ k = 1. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = 11, \\ 7k - 6 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 11, \\ k = \frac{9}{7} \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = 3, \\ 7k - 6 = 11, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ k = \frac{17}{7} \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Значит, груш в саду 33, яблонь 198, а слив 33. Всего 264 дерева.

6. Сколько всего 19-значных чисел, сумма цифр которых равна 4?

Решение.

Если четыре цифры 1, а остальные 14 цифр нули, то количество чисел будет $C_{18}^3 = \frac{18!}{3! \cdot 15!} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18}{6} = 816$. (Первая цифра должна быть "1", а остальные три единицы в 18 местах могут распределяться C_{18}^3 способами).

Если две цифры 1, одна цифра 2, а остальные 15 цифр нули, то количество чисел будет $3 \cdot C_{18}^2 = 3 \cdot \frac{18!}{2! \cdot 16!} = 3 \cdot \frac{17 \cdot 18}{2} = 3 \cdot 153 = 459$. (Если на первом месте "2", то число способов C_{18}^2 , а если на первом месте "1", то число способов $2 \cdot C_{18}^2$)

Если две цифры 2, а остальные 17 цифр нули, то количество чисел будет $C_{18}^1 = 18$. (Первая цифра должна быть "2", а другая "2" в остальных 18 местах может распределиться C_{18}^1 способами.)

Если одна цифра 1, одна цифра 3, а остальные 17 цифр нули, то количество чисел будет $2 \cdot C_{18}^1 = 36$. (Первая цифра должна быть "1", или "3", а другая цифра в остальных 18 местах может распределиться C_{18}^1 способами.)

Если одна цифра 4, а остальные 18 цифр нули, то количество чисел будет 1.

Всего $816 + 459 + 18 + 36 + 1 = 1330$.