

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА И.Г. ПЕТРОВСКОГО»  
(БГУ)

УДК 517.53

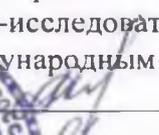
№ госрегистрации №114122240045

Инв. №215012670010

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по

научно-исследовательской работе  
и международным связям

 Т.А. Степченко

2015 г.



ОТЧЕТ О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме:

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ КОМПЛЕКСНОГО И ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(проектная часть государственного задания в сфере научной деятельности

№1.1704.2014К)

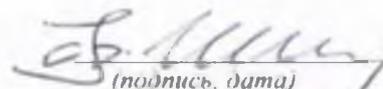
(промежуточный)

СОГЛАСОВАНО:

Директор НИИ фундаментальных  
и прикладных исследований

 /С.И. Михальченко/  
(подпись, дата)

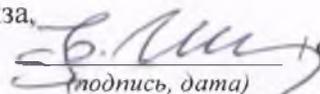
Руководитель темы  
д.ф.-м.н., проф.

 /Ф.А. Шамоян/  
(подпись, дата)  
21.01.15

Брянск 2015

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

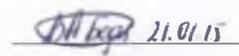
Руководитель работы,  
зав. НИЛ комплексного и функционального анализа,  
д. ф.-м. н., профессор

  
(подпись, дата) / А.А. Шамоян  
21.01.15.

(реферат, введение, основная часть,  
заключение)

Исполнители работы:

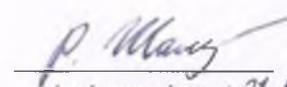
Старший научный сотрудник  
НИЛ комплексного и функционального анализа,  
к. ф.-м.н., доцент  
(п. 2, 3, 5)

  
(подпись, дата) / В.А. Бедная

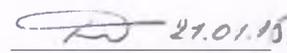
Старший научный сотрудник  
НИЛ комплексного и функционального анализа,  
к. ф.-м.н., доцент

  
(подпись, дата) / Е.Н. Шубабко

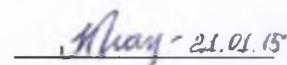
Старший научный сотрудник  
НИЛ комплексного и функционального анализа,  
к. ф.-м.н.  
(п. 9)

  
(подпись, дата) / Р.Ф. Шамоев  
21.01.15

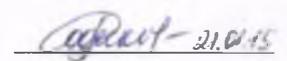
Старший научный сотрудник  
НИЛ комплексного и функционального анализа,  
д. пед.н., профессор

  
(подпись, дата) / В.И. Горбачев  
21.01.15

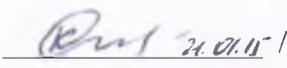
Младший научный сотрудник  
НИЛ комплексного и функционального анализа,  
к. ф.-м.н.  
(п. 6)

  
(подпись, дата) / Н.М. Махина  
21.01.15

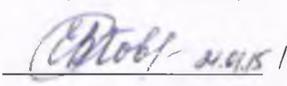
Младший научный сотрудник  
НИЛ комплексного и функционального анализа,  
к. ф.-м.н.  
(п. 2, 3)

  
(подпись, дата) / Е.Г. Родикова  
21.01.15

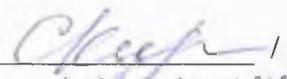
Младший научный сотрудник  
НИЛ комплексного и функционального анализа  
(п. 2, 5)

  
(подпись, дата) / О.В. Карбанович  
21.01.15

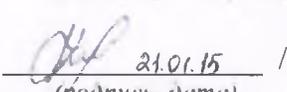
Лаборант-исследователь  
НИЛ комплексного и функционального анализа  
(п. 8)

  
(подпись, дата) / Е.В. Повприц  
21.01.15

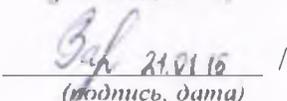
Лаборант-исследователь  
НИЛ комплексного и функционального анализа  
(п. 9)

  
(подпись, дата) / С.М. Куриленко  
21.01.15

Стажер-исследователь  
НИЛ комплексного и функционального анализа

  
(подпись, дата) / О.П. Коленченко  
21.01.15

Стажер-исследователь  
НИЛ комплексного и функционального анализа

  
(подпись, дата) / О.А. Зайцева  
21.01.15

## РЕФЕРАТ

Отчет 22 с., 1 ч., 0 рис., 0 табл., 46 источников.

### КОРНЕВЫЕ МНОЖЕСТВА, ЗАДАЧА КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ, ДВОЙСТВЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ПРОЕКТОР БЕРМАНА, ТРУБЧАТЫЕ ОБЛАСТИ, ВОСПРОИЗВОДЯЩИЕ ЯДРА, ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Объектом исследования являются классы аналитических функций в комплексной области.

Цели работы – решение фундаментальных задач, связанных с факторизационными и интегральными представлениями аналитических функций как одного, так и нескольких комплексных переменных.

В процессе работы получена полная характеристика тех весов, при которых каждая голоморфная функция в полидиске  $n$ -мерного комплексного пространства  $C^n$ , не имеющая нулей и принадлежащая весовым пространствам Бергмана  $A^p$ , является слабо обратимой функцией в весовом пространстве  $A^q$  для всех  $0 < q < p$ , установлена точность этого результата; найдено полное описание тех плюригармонических функций на единичной сфере  $n$ -мерного комплексного пространства  $C^n$ , при которых теплицев оператор с соответствующим символом является ограниченным оператором в гильбертовых пространствах голоморфных функций в единичном шаре; разработан новый эффективный метод решения задачи кратной интерполяции в классах аналитических в круге функций, характеристика  $P$ . Неванлинны которых имеет степенной рост вблизи граничной окружности; получено полное описание корневых множеств классов аналитических в круге функций, имеющих заданную мажоранту вблизи заданного конечного подмножества граничной окружности; установлены точные теоремы вложения типа теоремы Л. Карлесона; получены точные результаты, связанные с экстремальными задачами для пространств  $S$ . Бергмана и аналитических пространств  $O$ . Бесова; доказаны новые точные теоремы о дистанциях в весовых  $L^p$ -пространствах аналитических в трубчатых областях  $n$ -мерного комплексного пространства.

Данные работы могут применяться при исследовании вопросов зависимости поведения модуля аналитической функции вблизи особых точек от плотности точек его корневых множеств, иметь существенные приложения в гармоническом анализе и общей теории рядов и преобразований Фурье, в теории краевых задач математической физики, а также при разработке учебно-методических комплексов по соответствующим разделам комплексного и функционального анализа для бакалавров, магистров и аспирантов математических направлений подготовки.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
Основная часть.....	7
Заключение.....	17
Список использованных источников.....	18

## ВВЕДЕНИЕ

Комплексный анализ является одним из центральных направлений фундаментальной математики. Методы комплексного анализа имеют широкие приложения не только в теоретической математике, но и во многих разделах прикладной математики, теоретической механики, информатики и в других разделах естествознания.

Проект направлен на решение ряда актуальных проблем комплексного анализа, в том числе – на исследование корневых множеств и построение факторизационных представлений различных классов аналитических функций; изучение свойств преобразований Фурье функций ограниченного вида в трубчатых областях  $n$ -мерного комплексного пространства; исследование оператора гармонического сопряжения в односвязных областях комплексной плоскости; получение решения задачи кратной интерполяции в различных классах аналитических в круге функций.

По результатам выполнения годового этапа научно-исследовательской работы опубликованы работы [1]-[38], из которых работы [1]-[10] – в изданиях, индексируемых в базах Web of Science и Scopus, [1]-[12] – в изданиях, входящих в перечень ВАК; проведена региональная научно-практическая конференция с международным участием, по итогам которой издан сборник материалов; защищена диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 (см. [37]), еще одна диссертация представлена к защите; опубликована монография [38].

Результаты научно-исследовательской работы полностью соответствуют современному уровню исследований в области комплексного и функционального анализа, в некоторых случаях усиливают и уточняют результаты отечественных и зарубежных коллег. Приведем кратко некоторые примеры.

Теория классов Харди является классическим направлением комплексного анализа, в данной теории существенную роль играет внешне-внутренняя факторизация, построенная еще в начале 20-го столетия в классических работах Г. Сегё, М. Рисса, Р. Неванлинны, В.И. Смирнова. В работах Б.И. Коренблюма, В.П. Хавина, Ф.А. Шамояна, Н.А. Широкова, К.М. Дьяконова было установлено, что указанная факторизация может быть успешно применена для изучения классов аналитических в круге функций, гладких вплоть до его границы. Эти результаты основаны на том, что многие классы указанного типа инвариантны относительно теплицевых операторов вида  $T_h(f) = P_+(\bar{h}f)$ , где  $h$  – любая ограниченная аналитическая в круге функция. Здесь  $P_+$  – известный проектор М. Рисса. Операторы  $T_h$  применяются не только в теории факторизации, они также имеют широкие приложения во многих областях комплексного и функционального анализа (при

исследовании замкнутых идеалов в алгебрах аналитических функций, при изучении инвариантных подпространств оператора сдвига, в вопросах исследования метрических проекций и др.) Однако, следует отметить, что поведение кратных тёмлицевых операторов существенно отличается от одномерного случая. Так, например, аналог классической теоремы И.И. Привалова об ограниченности интегралов типа Коши в гёльдеровских классах, как установила Б. Ёрикке (1983 г.), в случае единичного тора не имеет места.

Естественно, возникает задача получения многомерных аналогов этих результатов, в том числе в классах голоморфных в поликруге функций и гладких вплоть до его границы. В работе Ф.А. Шамояна, Е.В. Повприц [2] эта задача получила свое окончательное решение для анизотропных аналитических пространств Соболева в поликруге.

Задачам интерполяции посвящены многочисленные работы известных специалистов в области комплексного и функционального анализа. Обзор результатов, относящихся к этой области исследований, содержится в известной работе Виноградова С.А., Хавина В.П. (1974 г.). Задача интерполяции в классах В.И. Смирнова была решена не так давно в работе зарубежных математиков А. Хартмана, Х. Массанеда, А. Николау, П. Томаса [39], в классах Бергмана – в работе К. Сейпа [40]. Задача кратной интерполяции в классах Харди  $H^p$  была решена в работах М.М. Джрбашяна и Г.М. Айрапетяна [38]. В работе В.А. Беднаж, Е.Г. Родиковой, Ф.А. Шамояна [21] решена кратная интерполяционная задача в классах функций со степенным ростом характеристики  $P$ . Неванлинны при условии, что узлы интерполяции находятся в углах Штольца, а также показано приложение этого результата к описанию главных частей в разложении Лорана мероморфной функции со степенным ростом характеристики.

Вопросы слабой обратимости в весовых пространствах аналитических функций имеют существенные приложения во многих вопросах комплексного и функционального анализа. Результат, полученный Ф.А. Шамояном в поликруге, является новым даже в одномерном случае: уточняет и усиливает известные результаты Н.К. Никольского и Л. Хедберга. Как было установлено в работах А. Берлинга, Дж. Ньюмена и Н.К. Никольского, данные результаты также связаны со знаменитой проблемой Римана о нулях Дзета-функции.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Введем некоторые обозначения и определения для изложения основных результатов научно-исследовательской работы. Символом  $C^n$  обозначим  $n$ -мерное комплексное пространство,  $C = C^1$ ,  $B = B_n$  – единичный шар в  $C^n$ ,  $U^n$  – единичный поликруг в  $C^n$ ,  $T^n$  – остов поликруга  $U^n$ ,  $D = U^1$  – единичный круг в  $C$ . Пусть  $G$  – некоторая область в  $C^n$ . Символом  $H(G)$  обозначим множество всех аналитических функций  $G$ ,  $M(G)$  – множество всех мероморфных в  $G$  функций. Через  $Z_f$  обозначим корневое множество ненулевой функции  $f \in H(G)$ . Через  $n(r, f)$ ,  $n(r, \infty)$  будем обозначать количество нулей и полюсов в круге радиуса  $r \in [0, 1)$  соответственно. Для краткости положим  $\Delta := \{t : 0 < t < 1\}$ .

Обозначим через  $\Omega$  класс неотрицательных суммируемых функций  $\omega$  на  $\Delta$ , для которых существуют неотрицательные числа  $q_\omega$ ,  $0 < q_\omega < 1$ ,  $m_\omega$ ,  $M_\omega$  такие, что

$$m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega, \forall r \in \Delta, \lambda \in [q_\omega, 1], \alpha_\omega = \frac{\ln m_\omega}{\ln q_\omega}, \beta_\omega = \frac{\ln M_\omega}{\ln q_\omega}.$$

Обозначим  $T(r, f)$  – характеристику Р. Неванлинны функции  $f \in M(D)$  (см. [39]).

Для любого  $\beta > -1$  символом  $\pi_\beta(z, z_k)$  будем обозначать бесконечное произведение М.М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности  $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$  (см. [43]):

$$\pi_\beta(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp(-U_\beta(z, z_k)),$$

где

$$U_\beta(z, z_k) = \frac{2(\beta+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\beta \ln |1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{z_k}|}{(1 - z \rho e^{-i\theta})^{\beta+2}} \rho d\rho d\theta.$$

Отметим, что произведение  $\pi_\beta$  сходится абсолютно и равномерно тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\beta+2} < +\infty.$$

Если  $\beta = p \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\{z_k\} \subset D$ , то

$$\pi_p(z, z_j) = \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{z_j - z}{1 - z_j z} \cdot \frac{1}{z_j} \cdot \exp \left\{ \sum_{s=1}^p \frac{1}{s} \left( \frac{1 - |z_j|^2}{1 - z_j z} \right)^s \right\}, z \in D.$$

Обозначим  $\pi_{\beta,n}(z, z_k)$  – произведение  $\pi_{\beta}(z, z_k)$  без  $n$ -го фактора.

Для удобства будем обозначать функцию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^1 \omega_1(1-x) \ln |f(rxe^{i\theta})| dx \right)^+ d\theta$$

через  $T_{\omega_1}(r, f)$ . Характеристика такого типа была впервые введена М.М. Джрбашяном в работе [44] при  $\omega_1(t) = t^\alpha$ ,  $\alpha > -1$ , и была названа  $\alpha$ -характеристикой.

Введем в рассмотрение следующие классы мероморфных функций

$$S_{\omega}^p = \left\{ f \in M(D) : \int_0^1 \omega(1-r) T^p(r, f) dr < +\infty \right\},$$

$$N_{\omega_1, \omega_2}^p = \left\{ f \in M(D) : \int_0^1 \omega_2(1-r) T_{\omega_1}^p(r, f) dr < +\infty \right\},$$

где  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ ,  $0 < p < +\infty$ .

В дальнейшем, если не оговорено иное, мы будем обозначать через  $C, c, c_1, \dots, c_n(\alpha, \beta, \dots)$  положительные константы, зависящие от  $\alpha, \beta, \dots$

1. В работе Ф.А. Шамомяна [12] установлен следующий результат: Пусть  $G$  – односвязная ограниченная область с квазиконформной границей  $\partial G$ , т.е.  $mes(K_r(z) \cap \partial G) \leq c_0 r$ , где  $r > 0$ ,  $K_r(z), z \in \partial G$  – круг с центром в точке  $z$  радиуса  $r$ ,  $\omega$  – функция типа модуля непрерывности, то есть функция  $t \rightarrow \frac{\omega(t)}{t}$  не возрастает на

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ ,  $\omega(0) = 0$ , и выполняется условие А. Зигмунда:  $\int_0^{\delta} \frac{\omega(t)}{t} dt = O(\omega(\delta))$ ,  $(\delta \rightarrow 0)$ .

Обозначим через  $\Lambda_{\omega}^a(G)$  класс функций  $f \in H(G) \cap C(\bar{G})$ :  $|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leq c_f \omega(|\zeta_1 - \zeta_2|)$ . В классе  $\Lambda_{\omega}^a(G)$  вводится естественная норма.

Справедлива

**Теорема 1.** Пусть  $h \in L^1(\partial G)$ ,  $T_h(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in G$ . Следующие

утверждения равносильны:

- 1)  $T_h$  является ограниченным оператором в  $\Lambda_{\omega}^a(G)$ ;
- 2)  $h$  можно представить в виде  $h(\zeta) = h_1(\zeta) + h_2(\zeta)$ ,  $\zeta \in \partial G$ , при этом  $h_1$  является граничным значением функции из  $\Lambda_{\omega}^a(G)$ ,  $h_2 \in H^{\infty}(C \setminus G)$ ,  $h_2(\infty) = 0$ .

Получен также аналог этой теоремы в классе  $\Lambda_{\omega}^a(B_n)$ .

2. Основные результаты работы [20] состоят в сравнении классов  $N_{\omega_1, \omega_2}^p$  и  $S_{\omega}^p$ . При определенных условиях на веса  $\omega_1, \omega_2$  имеет место вложение

$$S_{\omega_p}^p \subset N_{\omega_1, \omega_2}^p, 0 < p < +\infty,$$

где  $\omega_p(r) = \omega_2(r)\omega_1^p(r)r^p$ ,  $r \in \Delta$ . При этом, если  $\omega_1 = t^\alpha$ ,  $\omega_2 = t^\beta$ ,  $t \in \Delta$ ,  $\alpha, \beta > -1$ , то  $S_{\omega_p}^p = N_{\omega_1, \omega_2}^p$ ,  $0 < p < +\infty$ .

Здесь же получено полное описание корневых множеств и построено факторизационное представление класса  $N_{\omega_1, \omega_2}^p$  при всех  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$  и  $0 < p < +\infty$ . Отметим, что в том случае, когда веса  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , являются степенными функциями, полное описание корневых множеств и факторизационное представление таких классов было получено в работе Родиковой Е.Г. (см. [6]) Авторами установлены также следующие утверждения:

**Теорема 2.** Пусть  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ ,  $f \in N_{\omega_1, \omega_2}^p$ ,  $0 < p < +\infty$ ,  $f(z_k) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$

$f(0) = 1$ ,  $n_k = \text{card} \left\{ z_m : |z_m| \leq 1 - \frac{1}{2^k} \right\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p \omega_2 \left( \frac{1}{2^k} \right) \omega_1^p \left( \frac{1}{2^k} \right)}{2^{k(2p+1)}} < +\infty.$$

3. Для любого положительного  $\alpha > 0$  определим класс  $S_{\alpha}^{\infty}$  (см. [45]):

$$S_{\alpha}^{\infty} := \left\{ f \in M(D) : T(r, f) \leq \frac{C_f}{(1-r)^{\alpha}} \right\},$$

$$S_{\alpha, a}^{\infty} := S_{\alpha}^{\infty} \cap H(D).$$

Сформулируем задачу кратной интерполяции в классе  $S_{\alpha, a}^{\infty}$ : пусть  $\{\alpha_k\}_1^{\infty}$  и  $\{\gamma_k\}_1^{\infty}$  – произвольные последовательности комплексных чисел из  $D$ ; обозначим через  $q_j$  – кратность появления числа  $\alpha_j$  во всей последовательности  $\{\alpha_k\}_1^{\infty}$ ,  $s_j \geq 1$  – кратность появления числа  $\alpha_j$  на отрезке  $\{\alpha_k\}_{k=1}^j$ . Очевидно, что  $1 \leq s_j \leq q_j \leq +\infty$ . Требуется выявить критерии для  $\{\alpha_k\}_1^{\infty}$  и  $\{\gamma_k\}_1^{\infty}$ , обеспечивающие существование функции  $f \in S_{\alpha, a}^{\infty}$  такой, что

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k, k = 1, 2, \dots$$

В работе Беднаж В.А., Родиковой Е.Г., Шамомяна Ф.А. [21] сформулированная выше задача кратной интерполяции получила свое полное решение при условии, что узлы интерполяции находятся в углах Штольца. Для формулировки этого результата введем дополнительные обозначения.

Последовательность комплексных чисел  $\{\alpha_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset D$ , удовлетворяющих условиям

$$n(r) = \text{card}\{\alpha_k : |\alpha_k| < r\} \leq \frac{c}{(1-r)^{\alpha+1}},$$

$$|\pi_{p,n}(\alpha_j, \alpha_n)| \geq \exp \frac{-c_0}{(1-|\alpha_n|)^{\alpha+1}}, p \in \mathbb{Z}_+, c_0 > 0,$$

$$\sup_{k \geq 1} \{q_k\} = q,$$

отнесем к классу  $\Delta$ .

Справедлива:

**Теорема 3.** Пусть последовательность комплексных чисел  $\{\alpha_k\} \subset \bigcup_{s=1}^n \Gamma_\delta(\theta_s)$  для некоторого  $0 < \delta < \frac{1}{\alpha+1}$ . Если  $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta$ , то для любой последовательности  $\{\gamma_k\}_1^\infty$ , такой что

$$|\gamma_k| \leq \exp \frac{\delta}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}}, k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

можно построить в явном виде функцию  $f \in S_{\alpha, \alpha}^\infty$ , являющуюся решением интерполяционной задачи

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k, k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Справедливо и обратное утверждение, то есть если задача (2) разрешима для любой последовательности  $\{\gamma_k\}$  с условием (1), то  $\{\alpha_k\} \in \Delta$

На основе этого результата авторами было получено полное описание коэффициентов  $a_{k,i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , главных частей разложения Лорана функций из класса  $S_\alpha^\infty$ .

**Теорема 4.** Пусть последовательность комплексных чисел  $\{z_k\} \subset \bigcup_{s=1}^n \Gamma_\delta(\theta_s)$  для некоторого  $0 < \delta < \frac{1}{\alpha+1}$ . Если  $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$ , то для того, чтобы существовала функция  $F \in S_\alpha^\infty$  с главными частями

$$H(z, z_k, a_k) = \frac{a_{k,n}}{(z-z_k)^n} + \frac{a_{k,n-1}}{(z-z_k)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{k,1}}{(z-z_k)}, k=1, 2, \dots$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$|a_{k,i}| \leq \exp \frac{c}{(1-|z_k|)^{\alpha+1}}, i=\overline{1, n},$$

где  $c \neq c(i)$ .

4. В работе [26] исследуются корневые множества класса И.И. Привалова

$$\Pi_p = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^p d\theta < +\infty \right\}, 0 < p < +\infty.$$

Легко видеть, что при  $1 \leq p < +\infty$  корневые множества класса  $\Pi_p$  полностью характеризуются условием Бляшке. Однако, при  $0 < p < 1$ , как было замечено еще в 2007 г. в работе [46], условие Бляшке уже не является необходимым. В работе [9] установлен следующий результат:

**Теорема 5.** Если  $f \in \Pi_p$ ,  $0 < p < 1$ ,  $Z_f = \{z_k\}$ , то

$$n(r) \leq \frac{c_0}{(1-r)^{1/p}}, 0 < r < 1,$$

при некотором  $c_0 = c_0(p)$ .

Обратно, если  $\int_0^1 n^p(r) dr < +\infty$ , то можно построить функцию  $f \in \Pi_p$ ,  $0 < p < 1$ ,

такую что  $Z_f = \{z_k\}$ .

5. Пусть  $C_+$  – верхняя полуплоскость. Введем в рассмотрение весовые классы функций

$$N_\alpha(C_+) = \left\{ f \in H(C_+) : \int_{C_+} \frac{\ln^+ |f(\xi)| d\varphi}{1+|\xi|^\alpha} dm_2(\xi) < +\infty \right\},$$

$$\tilde{N}_\alpha(C_+) = \left\{ f \in H(C_+) : \int_{C_+} dm_2(\xi) < +\infty \right\}.$$

В работе [28] получено полное описание корневых множеств функций из классов  $N_\alpha(C_+)$  и  $\tilde{N}_\alpha(C_+)$ . В частности устанавливаются следующие результаты.

**Теорема 6.** Пусть  $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset C_+$ , причём  $z_k \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow +\infty$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

1) существует функция  $f \in N_\alpha(C_+)$  такая, что  $f(z_k) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $f(z) \neq 0$  при  $z \neq z_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;

$$2) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_k|^{\alpha+2}} < +\infty.$$

**Теорема 7.** Пусть  $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset C_+$ , причём  $|z_k| \leq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

1) существует функция  $f \in N_\alpha(C_+)$  такая, что  $f(z_k) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $f(z) \neq 0$  при  $z \neq z_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;

$$2) \sum_{k=1}^{+\infty} (Im z_k)^{\alpha+2} < +\infty.$$

Получены аналоги этих теорем и для класса  $\bar{N}_\alpha(C_+)$ .

6. Пусть  $G$  – некоторая односвязная область на комплексной плоскости  $C$ ; функция  $\varphi$  конформно отображает круг  $S$  на область  $G$ ;  $\psi$  – обратная функция для  $\varphi$ . При всех  $0 < p < +\infty$  обозначим  $L^p(\beta, G)$  – класс измеримых по Лебегу в  $G$  функций  $f$  таких, что

$$\|f\|_{L^p(\beta, G)} = \int_G |f(w)|^p \left(1 - |\psi(w)|^2\right)^\beta |\psi'(w)|^2 dm_2(w) < +\infty, \beta > -1,$$

где  $dm_2$  – плоская мера Лебега;  $A^p(\beta, G)$  – подпространство  $L^p(\beta, G)$ , состоящее из аналитических функций.

В работе Махиной Н.М. [22] получено описание линейных непрерывных функционалов в весовых пространствах  $A^p(\beta, G)$ ,  $1 < p < +\infty$ ,  $\beta > -1$ , аналитических в произвольной ограниченной односвязной области. Установлено, что

$$(A^p(\beta, G))^* = A^q(\beta, G), \text{ где } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Следующие результаты относятся к многомерному комплексному анализу.

7. В работе Ф.А. Шамомяна [2] установлена следующая теорема:

Пусть  $0 < p < +\infty$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  – вектор-функция, заданная на  $R_+$ ,  $A^p(\varphi, U^n)$  – пространство функций  $f \in H(U^n)$  с нормой

$$P f P_{A^p(\varphi, U^n)} = \left( \int_{U^n} |f(z)|^p \times \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right) dm_{2n}(z) \right)^{1/p} < +\infty,$$

где  $\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right) = \sum_{j=1}^n \varphi_j\left(\frac{1}{1-|z_j|}\right)$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n$ ,  $dm_{2n}(z)$  –  $2n$ -мерная мера Лебега на  $U^n$ .

**Теорема 8.** Пусть  $\varphi_j \in C^{(2)}(0, +\infty)$ ,  $\frac{\varphi_j''(x)}{(\varphi_j'(x))^2} \downarrow 0$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , причем

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\varphi_j(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx = +\infty, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Тогда если  $f \in A^p(\varphi, U^n)$ ,  $1 < p < +\infty$ ,  $f(z) \neq 0$ ,  $z \in U^n$ , то  $f$  – слабо обратима в пространстве  $A^q(\varphi, U^n)$  при всех  $0 < q < p < +\infty$ .

Обратно, если в (3) интегралы сходятся при некотором  $j = j_0$ ,  $1 \leq j_0 \leq n$ , то существует функция  $f \in A^p(\varphi, U^n)$ ,  $1 < p < +\infty$ ,  $f(z) \neq 0$ ,  $z \in U^n$ , не являющаяся слабо обратимой в  $A^q(\varphi, U^n)$  при всех  $0 < q < +\infty$ .

**8.** Анизотропным пространством Соболева  $A_\omega(\alpha, m)$  назовём пространство голоморфных в поликруге  $U^n$  функций  $f$ , для которых

$$P f P_{A_\omega(\alpha, m)} = \int_{U^n} |D^m f(z)| \omega_\Pi(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1} dm_{2n}(z) < +\infty, \quad (4)$$

$$m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n, \omega_\Pi(z) = \prod_{j=1}^n \omega_j(1-|z_j|), z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n.$$

Обозначим через  $RP(U^n)$  – класс суммируемых на торе  $T^n$  функций  $h$ , коэффициенты Фурье которых равны нулю вне множества  $Y_n = Z_+^n \cup Z_-^n$ , то есть класс функций представимых на торе в виде  $h(\zeta) = f(\zeta) + \overline{g(\zeta)}$ ,  $f, g \in H^1(U^n)$ , где  $H^1$  – класс Харди в  $U^n$ .

Кратным оператором Тёплица назовем интегральный оператор вида

$$T_h(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{f(\zeta)h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n, \quad (5)$$

где  $h \in L^1(T^n)$ ,  $f \in C_A(U^n)$ ,  $C_A(U^n) = C(U^n \cup \partial U^n) \cap H(U^n)$ .

Пусть  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  – вектор-функция типа модуля непрерывности, то есть  $\omega_j$  – неубывающие неотрицательные на  $R_+ = (0, +\infty)$  функции, такие что функции  $t_j \rightarrow \frac{\omega_j(t_j)}{t_j}$  не возрастают на  $R_+$ .

Если  $(k_1, \dots, k_n)$  некоторая перестановка чисел  $(1, 2, \dots, n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq r \leq n$ . Тогда кортежем порядка  $r$  назовем вектор с координатами  $(k_1, \dots, k_r)$ , множество всех кортежей порядка  $r$  обозначим через  $K_r$ .

И, наконец, если  $X$  – некоторое квазинормированное пространство, то через  $L(X)$  обозначим множество линейных непрерывных операторов, действующих в пространстве  $X$ .

В работе Шамомяна Ф.А., Повприц Е.В. [23] найден критерий ограниченности оператора Тёплица в весовом анизотропном пространстве Соболева голоморфных в поликруге функций. Установлены утверждения:

**Теорема 9.** Пусть  $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\omega$  – вектор-функция типа модуля непрерывности на  $\mathcal{Q}_n$ ,  $h$  – функция из класса  $RP(U^n)$ ,  $\int_0^1 \frac{\omega_j(u) du}{u} < +\infty$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

1. Предположим, что  $m_j \leq \alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , тогда следующие утверждения равносильны:

A.  $T_h \in L(A_\omega(\alpha, m))$ ;

B. функция  $h$  допускает представление

$$h(\zeta) = h_1(\zeta) + \overline{h_2(\zeta)}, \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in T^n,$$

где  $h_1, h_2$  являются граничными значениями функций, голоморфных в  $U^n$ , при этом  $h_1$  – мультипликатор пространства  $A_\omega(\alpha, m)$ ,  $D^{-m}h_2 \in \Lambda_\omega^\alpha$ , где  $D^{-m}$  – оператор, обратный к оператору  $D^m$ .

2. Предположим, что  $m_j \geq \alpha_j + 2$ ,  $j = 1, \dots, n$ , тогда следующие утверждения равносильны:

A.  $T_h \in L(A_\omega(\alpha, m))$ ;

B.  $h$  допускает представление

$$h(\zeta) = h_1(\zeta) + \overline{h_2(\zeta)}, \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in T^n,$$

где  $h_1 \in A_\omega(\alpha, m)$ ,  $h_2 \in H^\infty(U^n)$ .

**Теорема 10.** Пусть  $h \in H^1(U^n)$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$  и  $m_j = \alpha_j + 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ , тогда следующие утверждения равносильны:

1.  $T_h$  является ограниченным оператором в пространстве  $A_\omega(\alpha, m)$ ;

2. функция  $h \in H^s(U^n)$ , причем для любого кортежа  $k = (k_1, \dots, k_p) \in K_p$

справедлива оценка

$$\sup_{z \in U^n} \left\{ \left| \frac{\partial^p h(z_1, \dots, z_p)}{\partial z_{k_1} \dots \partial z_{k_p}} \right| \prod_{j=1}^p \frac{(1 - |z_{k_j}|)^2}{\omega_{k_j} (1 - |z_{k_j}|)} \int_{|z_{k_j}|}^1 \frac{\omega_{k_j}(u)}{u^2} du \right\} < +\infty, \quad (6)$$

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n.$$

9. В работе Шамомяна Р.Ф., Куриленко С.М. [7] доказаны теоремы вложения типа Л. Карлесона в пространствах аналитических функций в ограниченных строго псевдовыпуклых областях с гладкой границей.

В серии работ Шамомяна Р.Ф., Куриленко С.М. [13]-[15], [18], [19] получены новые точные результаты для функции расстояния в различных пространствах аналитических функций (типа Бергмана, типа Р. Неванлинны и ВМОА) в ограниченных областях с границей из  $C^2$ , в трубчатых областях над симметричными конусами и областях Зигеля.

В работах Шамомяна Р.Ф. [8], [9] исследованы экстремальные задачи в тех или иных классах аналитических функций типа Бергмана в различных многомерных областях (трубчатых областях типа Зигеля 2-го типа, мнимых ограниченных областях однородного типа и др.). Базу доказательств составляют новые теоремы об ограниченности проекторов типа Бергмана в указанных областях. Получены оценки типа Рудина-Форелли в данных типах областей, позволившие найти точное решение экстремальной задачи в классах Бергмана, состоящих из  $n$ -гармонических функций. Кроме того, получены оценки для экстремальных задач в классах Бергмана и оценки класса функций из класса Бергмана в минимальном шаре (точность этих оценок получена при наличии дополнительных условий, исчезающих в одномерном случае).

Кроме того, исследованы задачи, связанные с проблемой описания следов в аналитических классах типа Бергмана в строго псевдовыпуклых областях с гладкой границей. Получено окончательное решение этой задачи, обобщающее ранее известные результаты в единичном полидиске и в единичном шаре. Существенную роль в решении играет так называемое диадическое разбиение области на диадические кубы и оценки аналитических функций на данных кубах, рассмотренные в работе [17].

В работе [10] введены новые обобщающие пространства типа Неванлинны аналитических функций в единичном круге со смешанной нормой, исследованы их свойства. Кроме того, исследованы множества нулей, получены новые теоремы вложения для данных классов, обобщающие ранее известные. Рассмотрены также свойства подобных классов в областях с более общей структурой.

**10.** Важным достижением является успешная защита диссертации исполнителя научно-исследовательской работы Родиковой Евгении Геннадьевны «Факторизация, характеристика корневых множеств и вопросы интерполяции в весовых пространствах аналитических функций» по специальности 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» в Воронежском государственном университете (см. [37]) и представление к защите диссертации исполнителя научно-исследовательской работы Повприц Елены Викторовны по вышеуказанному направлению.

**11.** По результатам выполнения годового этапа научно-исследовательской работы опубликована монография Шамояна Ф.А. «Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой» [38].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения годового этапа проекта намечалось получить фундаментальные положения, описывающие корневые множества и построение факторизационных представлений классов И.И. Привалова при всех  $0 < p < 1$  и классов аналитических в заданной односвязной области функций, допускающих фиксированный рост вблизи произвольного замкнутого множества, расположенного на границе области; описывающие двойственные пространства к  $L_{p,q}$ -пространствам аналитических в трубчатых областях  $n$ -мерного комплексного пространства функций; а также характеристику Теплицевых и Ганкелевых операторов, действующих в указанных пространствах. Цели проекта, заявленные на 2014 г., в целом, достигнуты.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Shamoyan F.A., Povpritz E.V. Representation of continuous linear functionals in anisotropic weighted spaces of analytic functions in the polydisc with mixed norm // *Complex Variables and Elliptic Equations*. – 2014. – V. 59, I. 4.– P. 462-483
2. Shamoyan F.A. On polynomial approximation in anisotropic weighted spaces of holomorphic functions in a polydisc // *Complex Analysis and Operator Theory*. — Basel: Birkhauser Verlag. – 2014. – DOI: 10.1007/s11785-014-0408-9.
3. Shamoyan F.A., Povpritz E.V. Diagonal mapping in anisotropic spaces of analytic functions in polydisc with mixed norm // *Complex Analysis and Operator Theory*. – 2014. – V. 8, №6. – P. 1383-1403.
4. Shamoyan F.A., Rodikova E.G. On interpolation in the class of analytic functions in the unit disk with power growth of the Nevanlinna characteristic // *Журнал Сибирского федерального университета. Сер. Матем. и физ.* — Красноярск: Изд. СФУ. – 2014. – Т. 7. – Вып. 2. – С. 235–243.
5. Шамоян Ф.А., Беднаж В.А. Кратная интерполяция в весовых классах аналитических в круге функций // *Сибирские электронные математические известия*. – Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. – 2014. – Т. 11. – С. 354-361.
6. Родикова Е.Г. Факторизационное представление и описание корневых множеств одного класса аналитических в круге функций // *Сибирские электронные математические известия*. – Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. – 2014. – Т. 11. – С. 52-63.
7. Shamoyan R.F., Kurilenko S.M. On a new embedding theorem in analytic Bergman type spaces in bounded strictly pseudoconvex domains of n-dimensional complex space // *Журнал Сибирского Федерального университета: Математика и физика* – Красноярск: Изд. СФУ – 2014. – Т. 7., Вып. 2. – С. 383-388.
8. Shamoyan R.F., Mihic O. On distance function in some new analytic bergman type spaces in  $\mathbb{C}^n$  // *Journal of Function Spaces*. – 2014. – Article ID 275416. – 10 p.
9. Shamoyan R.F., Mihic O. On extremal problems in certain new Bergman type spaces in some bounded domains in  $\mathbb{C}^n$  // *Journal of Function Spaces*. – 2014. – Article ID 975434. – 11 p.
10. Shamoyan R.F., Mihic O. On zero sets and embeddings of some new analytic function spaces in the unit disk // *Kragujevac Journal of Mathematics*. – 2014. – V.38(2). – P. 229-244.
11. Шамоян Ф.А., Родикова Е.Г. О характеристике корневых множеств одного весового класса аналитических в круге функций // *Владикавказский математический журнал*. – 2014. – Т. 16, №3. – С.64-75.

12. Шамоян Ф.А. Теплицевы операторы и вопросы факторизации в гильбертовских пространствах аналитических функций // Вестник Брянского государственного университета: точные и естественные науки. — Брянск: РИО БГУ. — 2014. — №4. — С. 34–42.
13. Shamoyan R.F., Kurilenko S.M. Analytic functions on spaces of products of Siegel domains of second type // *Mathematica Montinegri*. – 2014. – V. XXX. –P. 5-16.
14. Shamoyan R.F., Kurilenko S.M. On multipliers of some new analytic Hardy-type  $H^p_{\vec{\alpha}}$  and Bergman-type function  $H^p(\vec{\alpha})$  spaces in polydisc // *Romai journal*. – 2014. – V.10, №1. – P. 187-204.
15. Shamoyan R.F., Kurilenko S.M. On multipliers of some new analytic function Spaces of BMOA type in the polydisc // *Boletin Asociación Matemática Venezolana*. – 2014. – P. 1-16.
16. Shamoyan R.F., Povpritz E.V. Trace theorems in Bergman-type spaces in products of unbounded Siegel domains // *Uzbek Mathematical Journal*. – 2014. – P. 149-157.
17. Shamoyan R.F., Mihic O. Sharp trace theorems for Bergman-type space in strictly pseudoconvex domains // *Reports national academy of sciences of Armenia*. – 2014. – V. 114, №2. – P. 91-96.
18. Shamoyan R.F., Kurilenko S.M. On extremal problems in tubular domains over symmetric cones // *Успехи анализа*. – 2014. – Том 3 (21), № 1. – С. 44-65.
19. Shamoyan R.F., Kurilenko S.M. Some remarks on distances in spaces of analytic functions in bounded domains with  $C^2$  boundary and admissible domains // *Чебышевский сборник*. – 2014. – Т. 15:3. – С. 114-130.
20. Беднаж В.А., Карбанович О.В., Шамоян Ф.А. О сравнении некоторых весовых классов мероморфных функций с ограничениями на характеристику  $P$ . Неванлинны // *Современные проблемы комплексного и гармонического анализа: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием / Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского*. – Брянск: РИО БГУ, 2014. – С.12-15.
21. Беднаж В.А., Родикова Е.Г., Шамоян Ф.А. Кратная интерполяция и описание главных частей в разложении Лорана в классах мероморфных в круге функций со степенным ростом характеристики  $P$ . Неванлинны // *Современные проблемы комплексного и гармонического анализа: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием / Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского*. – Брянск: РИО БГУ, 2014. – С.16-20.

22. Махина Н.М. Линейные непрерывные функционалы в некоторых весовых пространствах аналитических функций // Современные проблемы комплексного и гармонического анализа: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием / Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского. – Брянск: РИО БГУ, 2014. – С.31-33.
23. Повприц Е.В., Шамоян Ф.А. О теплицевых операторах в аналитических пространствах Соболева в единичном поликруге // Современные проблемы комплексного и гармонического анализа: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием / Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского. – Брянск: РИО БГУ, 2014. – С.39-41.
24. Shamoyan R., Kurilenko S. New integral operators in Bergman-type analytic spaces on semi-products of tubular domains over symmetric cones // Современные проблемы комплексного и гармонического анализа: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием / Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского. – Брянск: РИО БГУ, 2014. – С.3-7.
25. Шамоян Р.Ф., Куриленко С.М. Мультипликаторы пространств типа ВМОА голоморфных в поликруге функций // Современные проблемы комплексного и гармонического анализа: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием / Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского. – Брянск: РИО БГУ, 2014. – С.43-46.
26. Шамоян Ф.А. О нулях некоторых весовых классов аналитических в круге функций // Современные проблемы комплексного и гармонического анализа: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием / Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского. – Брянск: РИО БГУ, 2014. – С.46-50.
27. Шубабко Е.Н. Корневые множества и факторизация одного класса мероморфных функций бесконечного порядка // Современные проблемы комплексного и гармонического анализа: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием / Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского. – Брянск: РИО БГУ, 2014. – С.50-53.
28. Шамоян Ф.А., Беднаж В.А., Приходько О.В. О нулях одного класса аналитических в полуплоскости функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV международной научной конференции. — Смоленск.— 2014.— С. 217-218.
29. Шамоян Ф. А., Куриленко С.М. К вопросу об ограниченности Теплицевых операторов в весовых пространствах Соболева аналитических в единичном шаре функций

// Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV международной научной конференции. – Смоленск. – 2014. – С. 213-214.

30. Шамоян Р.Ф., Куриленко С.М. Мультипликаторы пространств  $H_{\vec{\alpha}}^{\bar{p}}$  и  $H^{\bar{p}}(\vec{\alpha})$  аналитических функций в поликруге со смешанной нормой // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV международной научной конференции. – Смоленск. – 2014. – С. 215-216.

31. Родикова Е.Г., Шамоян Ф.А. Условие типа Бляшке для одного класса аналитических в круге функций // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 17-й международной Саратовской зимней математической школы, посвященной 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова. – Саратов. – 2014. – С. 295-296.

32. Родикова Е.Г. Факторизационное представление класса аналитических в круге функций с  $\alpha$ - характеристикой из  $L^p$ -пространств // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения XXV». – Воронеж. – 2014. – С. 146-147.

33. Шамоян Ф.А., Повприц Е.В. Об ограниченности теплицева оператора в одном весовом анизотропном пространстве аналитических функций в поликруге // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения XXV». – Воронеж. – 2014. – С. 197-198.

34. Махина Н.М. Ортогональность некоторых систем функций в пространствах аналитических функций с весом // Известия академической науки: материалы X Международной научно-практической конференции. – Великобритания. – Т.6. – С. 3-4.

35. Шамоян Р.Ф., Куриленко С.М. О следах аналитических пространств в строго псевдо выпуклых областях с гладкой границей // Математика. Экономика. Образование: материалы XXII международной конференции. – 2014. – Ростов-на-Дону. – С. 102.

36. Шамоян Р.Ф., Куриленко С.М. Об одной экстремальной задаче в аналитических пространствах в областях из  $C^n$  // Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования: материалы международной научной конференции. – 2014. – Архангельск. – С. 471-473.

37. Родикова Е.Г. Факторизация, характеристика корневых множеств и вопросы интерполяции в весовых пространствах аналитических функций: автореферат диссертации на соискание степени канд. физ.-мат. наук.: 01.01.01. – Воронеж, 2014. – 16 с.

38. Шамоян Ф.А. Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой. – Брянск: РИО БГУ. – 2014. – 250 с.

39. Hartmann A. Interpolation in the Nevanlinna and Smirnov classes and harmonic majorants / A. Hartmann, X. Massaneda, A. Nicolau, P. Thomas // J. Funct. Anal. – 2004. – Т. 217. – Р. 1-37.
40. Seip K. Interpolating and sampling in spaces of analytic functions // University Lecture Series 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 2004. – 183 с.
41. Джрбашян М.М. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах  $H_p$  в полуплоскости // Изв. АН СССР. Сер. матем. – Т. 42:6. –1978. – С. 1322-1384.
42. Неванlinna Р. Однозначные аналитические функции (пер. с нем). – М.-Л.: ГИТТЛ, 1941. – 388 с.
43. Джрбашян М.М. О параметрическом представлении некоторых классов мероморфных функций в единичном круге // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 157, №5. – С. 1024-1027.
44. Джрбашян М.М. К проблеме представимости аналитических функций // Сообщ. Института матем. и механики АН Арм ССР. – 1948. – №2. – С. 3-40.
45. Шамоян Ф.А., Шубабко Е.Н. Введение в теорию весовых  $L^p$ -классов мероморфных функций.- Брянск: Группа компаний «Десяточка». – 2009. – 152 с.
46. Шамоян Ф.А. О нулевых множествах некоторых весовых классов аналитических в круге функций / Ф. А. Шамоян, В. А. Беднаж, О. В. Приходько // Вестник Брянского государственного университета: естественные и точные науки. – 2008. – №4. – С. 85-92.