МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА И.Г. ПЕТРОВСКОГО»
(БГУ)

УДК 517.53
№ госрегистрации №114122240045
Инв. №215012670010

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по
научно-исследовательской работе
и международным связям
____________Т.А. Степченко
_______01______ 2015 г.

ОТЧЕТ О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме:

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ КОМПЛЕКСНОГО И ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(проектная часть государственного задания в сфере научной деятельности
№1.1704.2014К)

(промежуточный)

СОГЛАСОВАНО:
Директор НИИ фундаментальных
и прикладных исследований ____________ /С.И. Михальченко/
(подпись, дата)

Руководитель темы
д.ф.-м.н., проф. ____________ /Ф.А. Шамоян/
(подпись, дата)
21.01.15

Брянск 2015

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель работы, зав. НИЛ комплексного и функционального анализа, д. ф.-м. н., профессор (реферат, введение, основная часть, заключение)	(подпись, дата) 21.01.15	Ф.А. Шамоян
Исполнители работы: Старший научный сотрудник НИЛ комплексного и функционального анализа, к. ф.-м.н., доцент (п. 2, 3, 5)	21.01.15 (подпись, дата)	/ В.А. Беднаж
Старший научный сотрудник НИЛ комплексного и функционального анализа, к. ф.-м.н., доцент	21.01.15 (подпись, дата)	/ Е.Н. Шубабко
Старший научный сотрудник НИЛ комплексного и функционального анализа, к. ф.-м.н. (п. 9)	(подпись, дата) 21.01.15	/ Р.Ф. Шамоев
Старший научный сотрудник НИЛ комплексного и функционального анализа, д. пед.н., профессор	21.01.15 (подпись, дата)	/ В.И. Горбачев
Младший научный сотрудник НИЛ комплексного и функционального анализа, к. ф.-м.н. (п. 6)	21.01.15 (подпись, дата)	/ Н.М. Махина
Младший научный сотрудник НИЛ комплексного и функционального анализа, к. ф.-м.н. (п. 2, 3)	21.01.15 (подпись, дата)	/ Е.Г. Родикова
Младший научный сотрудник НИЛ комплексного и функционального анализа (п. 2, 5)	21.01.15 (подпись, дата)	/ О.В. Карбанович
Лаборант-исследователь НИЛ комплексного и функционального анализа (п. 8)	21.01.15 (подпись, дата)	/ Е.В. Повприц
Лаборант-исследователь НИЛ комплексного и функционального анализа (п. 9)	(подпись, дата) 21.01.15	/ С.М. Куриленко
Стажер-исследователь НИЛ комплексного и функционального анализа	21.01.15 (подпись, дата)	/ О.П. Коленченко
Стажер-исследователь НИЛ комплексного и функционального анализа	21.01.16 (подпись, дата)	/ О.А. Зайцева

РЕФЕРАТ

Отчет 22 с., 1 ч., 0 рис., 0 табл., 46 источников.

КОРНЕВЫЕ МНОЖЕСТВА, ЗАДАЧА КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ, ДВОЙСТВЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ПРОЕКТОР БЕРМАНА, ТРУБЧАТЫЕ ОБЛАСТИ, ВОСПРОИЗВОДЯЩИЕ ЯДРА, ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Объектом исследования являются классы аналитических функций в комплексной области.

Цели работы – решение фундаментальных задач, связанных с факторизационными и интегральными представлениями аналитических функций как одного, так и нескольких комплексных переменных.

В процессе работы получена полная характеризация тех весов, при которых каждая голоморфная функция в полидиске n-мерного комплексного пространства C^n, не имеющая нулей и принадлежащая весовым пространствам Бергмана A^p, является слабо обратимой функцией в весовом пространстве A^q для всех $0<q<p$, установлена точность этого результата; найдено полное описание тех плюригармонических функций на единичной сфере n-мерного комплексного пространства C^n, при которых теплицев оператор с соответствующим символом является ограниченным оператором в гельдеровских пространствах голоморфных функций в единичном шаре; разработан новый эффективный метод решения задачи кратной интерполяции в классах аналитических в круге функций, характеристика Р. Неванлинны которых имеет степенной рост вблизи граничной окружности; получено полное описание корневых множеств классов аналитических в круге функций, имеющих заданную мажоранту вблизи заданного конечного подмножества граничной окружности; установлены точные теоремы вложения типа теоремы Л. Карлесона; получены точные результаты, связанные с экстремальными задачами для пространств С. Бергмана и аналитических пространств О. Бесова; доказаны новые точные теоремы о дистанциях в весовых L^p-пространствах аналитических в трубчатых областях n-мерного комплексного пространства.

Данные работы могут применяться при исследовании вопросов зависимости поведения модуля аналитической функции вблизи особых точек от плотности точек его корневых множеств, иметь существенные приложения в гармоническом анализе и общей теории рядов и преобразований Фурье, в теории краевых задач математической физики, а также при разработке учебно-методических комплексов по соответствующим разделам комплексного и функционального анализа для бакалавров, магистров и аспирантов математических направлений подготовки.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Комплексный анализ является одним из центральных направлений фундаментальной математики. Методы комплексного анализа имеют широкие приложения не только в теоретической математике, но и во многих разделах прикладной математики, теоретической механики, информатики и в других разделах естествознания.

Проект направлен на решение ряда актуальных проблем комплексного анализа, в том числе – на исследование корневых множеств и построение факторизационных представлений различных классов аналитических функций; изучение свойств преобразований Фурье функций ограниченного вида в трубчатых областях n-мерного комплексного пространства; исследование оператора гармонического сопряжения в односвязных областях комплексной плоскости; получение решения задачи кратной интерполяции в различных классах аналитических в круге функций.

По результатам выполнения годового этапа научно-исследовательской работы опубликованы работы [1]-[38], из которых работы [1]-[10] – в изданиях, индексируемых в базах Web of Science и Scopus, [1]-[12] – в изданиях, входящих в перечень ВАК; проведена региональная научно-практическая конференция с международным участием, по итогам которой издан сборник материалов; защищена диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 (см. [37]), еще одна диссертация представлена к защите; опубликована монография [38].

Результаты научно-исследовательской работы полностью соответствуют современному уровню исследований в области комплексного и функционального анализа, в некоторых случаях усиливают и уточняют результаты отечественных и зарубежных коллег. Приведем кратко некоторые примеры.

Теория классов Харди является классическим направлением комплексного анализа, в данной теории существенную роль играет внешне-внутренняя факторизация, построенная еще в начале 20-го столетия в классических работах Г. Сегё, М. Рисса, Р. Неванлинны, В.И. Смирнова. В работах Б.И. Коренблюма, В.П. Хавина, Ф.А. Шамояна, Н.А. Широкова, К.М. Дьяконова было установлено, что указанная факторизация может быть успешно применена для изучения классов аналитических в круге функций, гладких вплоть до его границы. Эти результаты основаны на том, что многие классы указанного типа инвариантны относительно теплицевых операторов вида $T_h(f) = P_+(\bar{h}f)$, где h – любая ограниченная аналитическая в круге функция. Здесь P_+ – известный проектор М. Рисса. Операторы T_h применяются не только в теории факторизации, они также имеют широкие приложения во многих областях комплексного и функционального анализа (при исследовании замкнутых идеалов в алгебрах аналитических функций, при изучении инвариантных подпространств оператора сдвига, в вопросах исследования метрических проекций и др.) Однако, следует отметить, что поведение кратных тёплицевых операторов существенно отличается от одномерного случая. Так, например, аналог классической теоремы И.И. Привалова об ограниченности интегралов типа Коши в гёльдеровких классах, как установила Б. Ёрикке (1983 г.), в случае единичного тора не имеет места.

Естественно, возникает задача получения многомерных аналогов этих результатов, в том числе в классах голоморфных в поликруге функций и гладких вплоть до его границы. В работе Ф.А. Шамояна, Е.В. Повприц [2] эта задача получила свое окончательное решение для анизотропных аналитических пространств Соболева в поликруге.

Задачам интерполяции посвящены многочисленные работы известных специалистов в области комплексного и функционального анализа. Обзор результатов, относящихся к этой области исследований, содержится в известной работе Виноградова С.А., Хавина В.П. (1974 г.). Задача интерполяции в классах В.И. Смирнова была решена не так давно в работе зарубежных математиков А. Хартмана, Х. Массанеда, А. Николау, П. Томаса [39], в классах Бергмана – в работе К. Сейпа [40]. Задача кратной интерполяции в классах Харди H^p была решена в работах М.М. Джрбашяна и Г.М. Айрапетяна [38]. В работе В.А. Беднаж, Е.Г. Родиковой, Ф.А. Шамояна [21] решена кратная интерполяционная задача в классах функций со степенным ростом характеристики Р. Неванлинны при условии, что узлы интерполяции находятся в углах Штольца, а также показано приложение этого результата к описанию главных частей в разложении Лорана мероморфной функции со степенным ростом характеристики.

Вопросы слабой обратимости в весовых пространствах аналитических функций имеют существенные приложения во многих вопросах комплексного и функционального анализа. Результат, полученный Ф.А. Шамояном в поликруге, является новым даже в одномерном случае: уточняет и усиливает известные результаты Н.К. Никольского и Л. Хедберга. Как было установлено в работах А. Берлинга, Дж. Ньюмена и Н.К. Никольского, данные результаты также связаны со знаменитой проблемой Римана о нулях Дзета-функции.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Введем некоторые обозначения и определения для изложения основных результатов науно-исследовательской работы. Символом C^n обозначим n-мерное комплексное пространство, $\mathrm{C}=\mathrm{C}^1$, $B=B_n$ – единичный шар в C^n, U^n – единичный поликруг в C^n, T^n – остов поликруга U^n, $D=U^1$ – единичный круг в C. Пусть G – некоторая область в C^n. Символом $H(G)$ обозначим множество всех аналитических функций G, $M(G)$ – множество всех мероморфных в G функций. Через Z_f обозначим корневое множество ненулевой функции $f\in H(G)$. Через $n(r,f)$, $n(r,\infty)$ будем обозначать количество нулей и полюсов в круге радиуса $r\in[0,1)$ соответственно. Для краткости положим $\Delta:=\{t:0<t<1\}$.

Обозначим через Ω класс неотрицательных суммируемых функций ω на Δ, для которых существуют неотрицательные числа q_ω, $0<q_\omega<1$, m_ω, M_ω такие, что

$$m_\omega\le\frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)}\le M_\omega,\forall r\in\Delta,\lambda\in[q_\omega,1],\alpha_\omega=\frac{\ln m_\omega}{\ln q_\omega},\beta_\omega=\frac{\ln M_\omega}{\ln q_\omega}.$$

Обозначим $T(r,f)$ – характеристику Р. Неванлинны функции $f\in M(D)$ (см. [39]).

Для любого $\beta>-1$ символом $\pi_\beta(z,z_k)$ будем обозначать бесконечное произведение М.М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ (см. [43]):

$$\pi_\beta(z,z_k)=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp(-U_\beta(z,z_k)),$$

где

$$U_\beta(z,z_k)=\frac{2(\beta+1)}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)^\beta\ln|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{z_k}|}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\beta+2}}\rho d\rho d\theta.$$

Отметим, что произведение π_β сходится абсолютно и равномерно тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\beta+2}<+\infty.$$

Если $\beta=p\in\mathrm{Z}_+$, $\{z_k\}\subset D$, то

$$\pi_p(z,z_j)=\prod_{j=1}^{+\infty}\frac{z_j-z}{1-\bar{z}_jz}\cdot\bar{z}_j\cdot\exp\left\{\sum_{s=1}^{p}\frac{1}{s}\left(\frac{1-|z_j|^2}{1-\bar{z}_jz}\right)^s\right\},z\in D.$$

Обозначим $\pi_{\beta,n}(z,z_k)$ – произведение $\pi_\beta(z,z_k)$ без n-го фактора.

Для удобства будем обозначать функцию

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \omega_1(1-x)\ln|f(rxe^{i\theta})|\,dx\right)^+ d\theta$$

через $T_{\omega_1}(r,f)$. Характеристика такого типа была впервые введена М.М. Джрбашяном в работе [44] при $\omega_1(t)=t^\alpha$, $\alpha>-1$, и была названа α-характеристикой.

Введем в рассмотрение следующие классы мероморфных функций

$$S_\omega^p=\left\{f\in M(D):\int_0^1\omega(1-r)T^p(r,f)dr<+\infty\right\},$$

$$N_{\omega_1,\omega_2}^p=\left\{f\in M(D):\int_0^1\omega_2(1-r)T_{\omega_1}^p(r,f)dr<+\infty\right\},$$

где $\omega_1,\omega_2\in\Omega$, $0<p<+\infty$.

В дальнейшем, если не оговорено иное, мы будем обозначать через $C,c,c_1,...,c_n(\alpha,\beta,...)$ положительные константы, зависящие от $\alpha,\beta,...$

1. В работе Ф.А. Шамояна [12] установлен следующий результат: Пусть G – односвязная ограниченная область с квазиконформной границей ∂G, т.е. $mes(K_r(z)\cap\partial G)\le c_0r$, где $r>0$, $K_r(z),z\in\partial G$ – круг с центром в точке z радиуса r, ω – функция типа модуля непрерывности, то есть функция $t\to\dfrac{\omega(t)}{t}$ не возрастает на $\mathrm{R}_+=[0,+\infty)$, $\omega(0)=0$, и выполняется условие А. Зигмунда: $\displaystyle\int_0^\delta\frac{\omega(t)}{t}dt=O(\omega(\delta))$, $(\delta\to0)$.

Обозначим через $\Lambda_\omega^a(G)$ класс функций $f\in H(G)\cap C(\overline{G})$: $|f(\zeta_1)-f(\zeta_2)|\le c_f\omega(|\zeta_1-\zeta_2|)$. В классе $\Lambda_\omega^a(G)$ вводится естественная норма. Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $h\in L^1(\partial G)$, $T_h(f)(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)h(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, z\in G.$ *Следующие утверждения равносильны:*

1) T_h является ограниченным оператором в $\Lambda_\omega^a(G)$;

2) h можно представить в виде $h(\zeta)=h_1(\zeta)+h_2(\zeta)$, $\zeta\in\partial G$, при этом h_1 является граничным значением функции из $\Lambda_\omega^a(G)$, $h_2\in H^\infty(\mathrm{C}\setminus G)$, $h_2(\infty)=0$.

Получен также аналог этой теоремы в классе $\Lambda^a_\omega(B_n)$.

2. Основные результаты работы [20] состоят в сравнении классов $N^p_{\omega_1,\omega_2}$ и S^p_ω. При определенных условиях на веса ω_1,ω_2 имеет место вложение

$$S^p_{\omega_p} \subset N^p_{\omega_1,\omega_2}, 0 < p < +\infty,$$

где $\omega_p(r) = \omega_2(r)\omega_1^p(r)r^p$, $r \in \Delta$. При этом, если $\omega_1 = t^\alpha$, $\omega_2 = t^\beta$, $t \in \Delta$, $\alpha, \beta > -1$, то $S^p_{\omega_p} = N^p_{\omega_1,\omega_2}$, $0 < p < +\infty$.

Здесь же получено полное описание корневых множеств и построено факторизационное представление класса $N^p_{\omega_1,\omega_2}$ при всех $\omega_1,\omega_2 \in \Omega$ и $0 < p < +\infty$. Отметим, что в том случае, когда веса ω_i, $i = 1, 2$, являются степенными функциями, полное описание корнеых множеств и факторизационное представление таких классов было получено в работе Родиковой Е.Г. (см. [6]) Авторами установлены также следующие утверждения:

Теорема 2. *Пусть* $\omega_1,\omega_2 \in \Omega$, $f \in N^p_{\omega_1,\omega_2}$, $0 < p < +\infty$, $f(z_k) = 0$, $k = 1,2,\ldots$ $f(0) = 1$, $n_k = card\left\{z_m : |z_m| \le 1 - \dfrac{1}{2^k}\right\}, k = 1,2,\ldots$ *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p \omega_2\left(\frac{1}{2^k}\right)\omega_1^p\left(\frac{1}{2^k}\right)}{2^{k(2p+1)}} < +\infty.$$

3. Для любого положительного $\alpha > 0$ определим класс S^∞_α (см. [45]):

$$S^\infty_\alpha := \left\{ f \in M(D) : T(r,f) \le \frac{C_f}{(1-r)^\alpha} \right\},$$

$$S^\infty_{\alpha,a} := S^\infty_\alpha \cap H(D).$$

Сформулируем задачу кратной интерполяции в классе $S^\infty_{\alpha,a}$: пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и $\{\gamma_k\}_1^\infty$ – произвольные последовательности комплексных чисел из D; обозначим через q_j – кратность появления числа α_j во всей последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $s_j \ge 1$ – кратность появления числа α_j на отрезке $\{\alpha_k\}_{k=1}^j$. Очевидно, что $1 \le s_j \le q_j \le +\infty$. Требуется выявить критерии для $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и $\{\gamma_k\}_1^\infty$, обеспечивающие существование функции $f \in S^\infty_{\alpha,a}$ такой, что

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k, k = 1,2,\ldots$$

В работе Беднаж В.А., Родиковой Е.Г., Шамояна Ф.А. [21] сформулированная выше задача кратной интерполяции получила свое полное решение при условии, что узлы интерполяции находятся в углах Штольца. Для формулировки этого результата введем дополнительные обозначения.

Последовательность комплексных чисел $\{\alpha_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset D$, удовлетворяющих условиям

$$n(r) = card\{\alpha_k : |\alpha_k| < r\} \leq \frac{c}{(1-r)^{\alpha+1}},$$

$$\left|\pi_{p.n}(\alpha_j, \alpha_n)\right| \geq \exp\frac{-c_0}{(1-|\alpha_n|)^{\alpha+1}}, p \in \mathrm{Z}_+, c_0 > 0,$$

$$\sup_{k\geq 1}\{q_k\} = q,$$

отнесем к классу Δ.

Справедлива:

Теорема 3. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{\alpha_k\} \subset \bigcup_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s)$ *для некоторого* $0 < \delta < \dfrac{1}{\alpha+1}$. *Если* $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta$, *то для любой последовательности* $\{\gamma_k\}_1^\infty$, *такой что*

$$|\gamma_k| \leq \exp\frac{\delta}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}}, k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

можно построить в явном виде функцию $f \in S_{\alpha,a}^\infty$, являющуюся решением интерполяционной задачи

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k, k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Справедливо и обратное утверждение, то есть если задача (2) разрешима для любой последовательности $\{\gamma_k\}$ с условием (1), то $\{\alpha_k\} \in \Delta$

На основе этого результата авторами было получено полное описание коэффициентов $a_{k,i}$, $i = \overline{1,n}$, главных частей разложения Лорана функций из класса S_α^∞.

Теорема 4. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{z_k\} \subset \bigcup_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s)$ *для некоторого* $0 < \delta < \dfrac{1}{\alpha+1}$. *Если* $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$, *то для того, чтобы существовала функция* $F \in S_\alpha^\infty$ *с главными частями*

$$H(z,z_k,a_k)=\frac{a_{k,n}}{(z-z_k)^n}+\frac{a_{k,n-1}}{(z-z_k)^{n-1}}+\ldots+\frac{a_{k,1}}{(z-z_k)},k=1,2,\ldots$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$|a_{k,i}|\le\exp\frac{c}{(1-|z_k|)^{\alpha+1}},i=\overline{1,n},$$

где $c\ne c(i)$.

4. В работе [26] исследуются корневые множества класса И.И. Привалова

$$\Pi_p=\left\{f\in H(D):\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln^+|f(re^{i\theta})|\right)^p d\theta<+\infty\right\},0<p<+\infty.$$

Легко видеть, что при $1\le p<+\infty$ корневые множества класса Π_p полностью характеризуются условием Бляшке. Однако, при $0<p<1$, как было замечено еще в 2007 г. в работе [46], условие Бляшке уже не является необходимым. В работе [9] установлен следующий результат:

Теорема 5. *Если* $f\in\Pi_p$, $0<p<1$, $Z_f=\{z_k\}$, *то*

$$n(r)\le\frac{c_0}{(1-r)^{1/p}},0<r<1,$$

при некотором $c_0=c_0(p)$.

Обратно, если $\int_0^1 n^p(r)dr<+\infty$, *то можно построить функцию* $f\in\Pi_p$, $0<p<1$, *такую что* $Z_f=\{z_k\}$.

5. Пусть C_+ – верхняя полуплоскость. Введем в рассмотрение весовые классы функций

$$N_\alpha(C_+)=\left\{f\in H(C_+):\int_{C_+}\frac{ln^+|f(\xi)d\varphi|}{1+|\xi|^\alpha}dm_2(\xi)<+\infty\right\},$$

$$\tilde N_\alpha(C_+)=\left\{f\in H(C_+):\int_{C_+}dm_2(\xi)<+\infty\right\}.$$

В работе [28] получено полное описание корневых множеств функций из классов $N_\alpha(C_+)$ и $\tilde N_\alpha(C_+)$. В частности устанавливается следующие результаты.

Теорема 6. *Пусть* $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}\subset C_+$, *причём* $z_k\to+\infty$ *при* $k\to+\infty$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *существует функция* $f \in N_\alpha(C_+)$ *такая, что* $f(z_k)=0$, $k=1,2,\ldots$, $f(z)\neq 0$ *при* $z \neq z_k$, $k=1,2,\ldots$;

2) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_k|^{\alpha+2}} < +\infty$.

Теорема 7. *Пусть* $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset C_+$, *причём* $|z_k| \leq 1$, $k=1,2,\ldots$ *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *существует функция* $f \in N_\alpha(C_+)$ *такая, что* $f(z_k)=0$, $k=1,2,\ldots$, $f(z)\neq 0$ *при* $z \neq z_k$, $k=1,2,\ldots$;

2) $\sum_{k=1}^{+\infty} (Imz_k)^{\alpha+2} < +\infty$.

Получены аналоги этих теорем и для класса $\tilde{N}_\alpha(C_+)$.

6. Пусть G – некоторая односвязная область на комплексной плоскости C; функция φ конформно отображает круг S на область G; ψ – обратная функция для φ. При всех $0<p<+\infty$ обозначим $L^p(\beta,G)$ – класс измеримых по Лебегу в G функций f таких, что

$$\|f\|_{L^p(\beta,G)} = \int_G |f(w)|^p \left(1-|\psi(w)|^2\right)^\beta |\psi'(w)|^2 \, dm_2(w) < +\infty, \beta > -1,$$

где dm_2 – плоская мера Лебега; $A^p(\beta,G)$ – подпространство $L^p(\beta,G)$, состоящее из аналитических функций.

В работе Махиной Н.М. [22] получено описание линейных непрерывных функционалов в весовых пространствах $A^p(\beta,G)$, $1<p<+\infty$, $\beta>-1$, аналитических в произвольной ограниченной односвязной области. Установлено, что $(A^p(\beta,G))^* = A^q(\beta,G)$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Следующие результаты относятся к многомерному комплексному анализу.

7. В работе Ф.А. Шамояна [2] установлена следующая теорема:

Пусть $0<p<+\infty$, $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ – вектор-функция, заданная на R_+, $A^p(\varphi,U^n)$ – пространство функций $f \in H(U^n)$ с нормой

$$\|f\|_{A^p(\varphi,U^n)} = \left(\int_{U^n} |f(z)|^p \times \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right) dm_{2n}(z) \right)^{1/p} < +\infty,$$

где $\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\left(\frac{1}{1-|z_j|}\right)$, $z=(z_1,\dots,z_n)\in U^n$, $dm_{2n}(z)$ – $2n$-мерная мера Лебега на U^n.

Теорема 8. *Пусть* $\varphi_j\in C^{(2)}(0,+\infty)$, $\frac{\varphi_j''(x)}{(\varphi_j'(x))^2}\downarrow 0$, $x\to+\infty$, $j=1,2,\dots,n$, *причем*

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{\varphi_j(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}dx=+\infty, j=1,2,\dots n. \tag{3}$$

Тогда если $f\in A^p(\varphi,U^n)$, $1<p<+\infty$, $f(z)\neq 0$, $z\in U^n$, *то* f *– слабо обратима в пространстве* $A^q(\varphi,U^n)$ *при всех* $0<q<p<+\infty$.

Обратно, если в (3) интегралы сходятся при некотором $j=j_0$, $1\le j_0\le n$, *то существует функция* $f\in A^p(\varphi,U^n)$, $1<p<+\infty$, $f(z)\neq 0$, $z\in U^n$, *не являющаяся слабо обратимой в* $A^q(\varphi,U^n)$ *при всех* $0<q<+\infty$.

8. Анизотропным пространством Соболева $A_\omega(\alpha,m)$ назовём пространство голоморфных в поликруге U^n функций f, для которых

$$\|f\|_{A_\omega(\alpha,m)}=\int_{U^n}|D^m f(z)|\,\omega_\Pi(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1}dm_{2n}(z)<+\infty, \tag{4}$$

$$m=(m_1,\dots,m_n)\in \mathbb{N}^n, \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in \mathbb{R}_+^n,\ \omega_\Pi(z)=\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-|z_j|),\ z=(z_1,\dots,z_n)\in U^n.$$

Обозначим через $RP(U^n)$ – класс суммируемых на торе T^n функций h, коэффициенты Фурье которых равны нулю вне множества $Y_n=Z_+^n\cup Z_-^n$, то есть класс функций представимых на торе в виде $h(\zeta)=f(\zeta)+\overline{g}(\zeta)$, $f,g\in H^1(U^n)$, где H^1 – класс Харди в U^n.

Кратным оператором Тёплица назовем интегральный оператор вида

$$T_h(f)(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n}\frac{f(\zeta)h(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad z=(z_1,\dots,z_n)\in U^n, \tag{5}$$

где $h\in L^1(T^n), f\in C_A(U^n)$, $C_A(U^n)=C(U^n\cup\partial U^n)\cap H(U^n)$.

Пусть $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)$ – вектор-функция типа модуля непрерывности, то есть ω_j – неубывающие неотрицательные на $R_+=(0,+\infty)$ функции, такие что функции $t_j\to\frac{\omega_j(t_j)}{t_j}$ не возрастают на R_+.

Если $(k_1,...,k_n)$ некоторая перестановка чисел $(1,2,...,n)$, $n \in N$, $1 \le r \le n$. Тогда кортежем порядка r назовем вектор с координатами $(k_1,...,k_r)$, множество всех кортежей порядка r обозначим через K_r.

И, наконец, если X – некоторое квазинормированное пространство, то через $L(X)$ обозначим множество линейных непрерывных операторов, действующих в пространстве X.

В работе Шамояна Ф.А., Повприц Е.В. [23] найден критерий ограниченности оператора Тёплица в весовом анизотропном пространстве Соболева голоморфных в поликруге функций. Установлены утверждения:

Теорема 9. *Пусть* $m=(m_1,...,m_n)\in \mathrm{N}^n$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in \mathrm{R}_+^n$, ω *– вектор-функция типа модуля непрерывности на* Q_n, h *– функция из класса* $RP(U^n)$, $\int\limits_0^1 \frac{\omega_j(u)du}{u} < +\infty$, $j=1,...,n$.

1. *Предположим, что* $m_j \le \alpha_j$, $j=1,..n$, *тогда следующие утверждения равносильны:*

A. $T_h \in L(A_\omega(\alpha,m))$;

B. *функция* h *допускает представление*

$$h(\zeta)=h_1(\zeta)+\overline{h_2(\zeta)}, \zeta=(\zeta_1,...,\zeta_n)\in T^n,$$

где h_1,h_2 *являются граничными значениями функций, голоморфных в* U^n, *при этом* h_1 *– мультипликатор пространства* $A_\omega(\alpha,m)$, $D^{-m}h_2 \in \Lambda_\omega^\alpha$, *где* D^{-m} *– оператор, обратный к оператору* D^m.

2. *Предположим, что* $m_j \ge \alpha_j + 2$, $j=1,...,n$, *тогда следующие утверждения равносильны:*

A. $T_h \in L(A_\omega(\alpha,m))$;

B. h *допускает представление*

$$h(\zeta)=h_1(\zeta)+\overline{h_2(\zeta)}, \zeta=(\zeta_1,...,\zeta_n)\in T^n,$$

где $h_1 \in A_\omega(\alpha,m), h_2 \in H^\infty(U^n)$.

Теорема 10. *Пусть* $h\in H^1(U^n)$, $m=(m_1,...,m_n)\in \mathrm{N}^n$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in \mathrm{R}_+^n$ *и* $m_j=\alpha_j+1$, $j=1,...,n$, *тогда следующие утверждения равносильны:*

1. T_h *является ограниченным оператором в пространстве* $A_\omega(\alpha,m)$;

2. функция $h \in H^{\infty}(U^n)$, *причем для любого кортежа* $k=(k_1,\dots,k_p) \in K_p$ *справедлива оценка*

$$\sup_{z \in U^n} \{ \left| \frac{\partial^p h(z_1,\dots,z_p)}{\partial z_{k_1} \dots \partial z_{k_p}} \right| \prod_{j=1}^{p} \frac{(1-|z_{k_j}|)^2}{\omega_{k_j}(1-|z_{k_j}|)} \int_{1-|z_{k_j}|}^{1} \frac{\omega_{k_j}(u)}{u^2} du \} < +\infty, \tag{6}$$

$z=(z_1,\dots,z_n) \in U^n$.

9. В работе Шамояна Р.Ф., Куриленко С.М. [7] доказаны теоремы вложения типа Л. Карлесона в пространствах аналитических функций в ограниченных сторого псевдовыпуклых областях с гладкой границей.

В серии работ Шамояна Р.Ф., Куриленко С.М. [13]-[15], [18], [19] получены новые точные результаты для функции расстояния в различных пространствах аналитических функций (типа Бергмана, типа Р. Неванлинны и BMOA) в ограниченных областях с границей из C^2, в трубчатых областях над симметричными конусами и областях Зигеля.

В работах Шамояна Р.Ф. [8], [9] исследованы экстремальные задачи в тех или иных классах аналитических функций типа Бергмана в различных многомерных областях (трубчатых областях типа Зигеля 2-го типа, мнимых ограниченных областях однородного типа и др.). Базу доказательств составляют новые теоремы об ограниченности проекторов типа Бергмана в указанных областях. Получены оценки типа Рудина-Форелли в данных типах областей, позволившие найти точное решение экстремальной задачи в классах Бергмана, состоящих из n-гармонических функций. Кроме того, получены оценки для экстремальных задач в классах Бергмана и оценки класса функций из класса Бергмана в минимальном шаре (точность этих оценок получена при наличии дополнительных условий, исчезающих в одномерном случае).

Кроме того, исследованы задачи, связанные с проблемой описания следов в аналитических классах типа Бергмана в строго псевдовыпуклых областях с гладкой границей. Получено окончательное решение этой задачи, обобщающее ранее известные результаты в единичном полидиске и в единичном шаре. Существенную роль в решении играет так называемое диадическое разбиение области на диадические кубы и оценки аналитических функций на данных кубах, рассмотренные в работе [17].

В работе [10] введены новые обобщающие пространства типа Неванлинны аналитических функций в единичном круге со смешанной нормой, исследованы их свойства. Кроме того, исследованы множества нулей, получены новые теоремы вложения для данных классов, обобщающие ранее известные. Рассмотрены также свойства подобных классов в областях с более общей структурой.

10. Важным достижением является успешная защита диссертации исполнителя научно-исследовательской работы Родиковой Евгении Геннадьевны «Факторизация, характеризация корневых множеств и вопросы интерполяции в весовых пространствах аналитических функций» по специальности 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» в Воронежском государственном университете (см. [37]) и представление к защите диссертации исполнителя научно-исследовательской работы Повприц Елены Викторовны по вышеуказанному направлению.

11. По результатам выполнения годового этапа научно-исследовательской работы опубликована монография Шамояна Ф.А. «Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой» [38].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения годового этапа проекта намечалось получить фундаментальные положения, описывающие корневые множества и построение факторизационных представлений классов И.И. Привалова при всех $0 < p < 1$ и классов аналитических в заданной односвязной области функций, допускающих фиксированный рост вблизи произвольного замкнутого множества, расположенного на границе области; описывающие двойственные пространства к $L_{p,q}$-пространствам аналитических в трубчатых областях n-мерного комплексного пространства функций; а также характеризацию Теплицевых и Ганкелевых операторов, действующих в указанных пространствах. Цели проекта, заявленные на 2014 г., в целом, достигнуты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Shamoyan F.A., Povpritz E.V. Representation of continuous linear functionals in anisotropic weighted spaces of analytic functions in the polydisc with mixed norm // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2014. – V. 59, I. 4.– P. 462-483
2. Shamoyan F.A. On polynomial approximation in anisotropic weighted spaces of holomorphic functions in a polydisc // Complex Analysis and Operator Theory. — Basel: Birkhauser Verlag. – 2014. – DOI: 10.1007/s11785-014-0408-9.
3. Shamoyan F.A., Povpritz E.V. Diagonal mapping in anisotropic spaces of analytic functions in polydisc with mixed norm // Complex Analysis and Operator Theory. – 2014. – V. 8, №6. – P. 1383-1403.
4. Shamoyan F.A., Rodikova E.G. On interpolation in the class of analytic functions in the unit disk with power growth of the Nevanlinna characteristic // Журнал Сибирского федерального университета. Сер. Матем. и физ. — Красноярск: Изд. СФУ. – 2014. – Т. 7. – Вып. 2. – С. 235–243.
5. Шамоян Ф.А., Беднаж В.А. Кратная интерполяция в весовых классах аналитических в круге функций // Сибирские электронные математические известия. – Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. – 2014. – Т. 11. – С. 354-361.
6. Родикова Е.Г. Факторизационное представление и описание корневых множеств одного класса аналитических в круге функций // Сибирские электронные математические известия. – Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. – 2014. – Т. 11. – С. 52-63.
7. Shamoyan R.F., Kurilenko S.M. On a new embedding theorem in analytic Bergman type spaces in bounded strictly pseudoconvex domains of n-dimensional complex space // Журнал Сибирского Федерального университета: Математика и физика – Красноярск: Изд. СФУ – 2014. – Т. 7., Вып. 2. – С. 383-388.
8. Shamoyan R.F., Mihic O. On distance function in some new analytlc bergman type spaces in $\mathbb{C}^n$ // Journal of Function Spaces. – 2014. – Article ID 275416. – 10 p.
9. Shamoyan R.F., Mihic O. On extremal problems in certain new Bergman type spaces in some bounded domains in C^n // Journal of Function Spaces. – 2014. – Article ID 975434. – 11 p.
10. Shamoyan R.F., Mihic O. On zero sets and embeddings of some new analytic function spaces in the unit disk // Kragujevac Journal of Mathematics. – 2014. – V.38(2). – P. 229-244.
11. Шамоян Ф.А., Родикова Е.Г. О характеризации корневых множеств одного весового класса аналитических в круге функций // Владикавказский математический журнал. – 2014. – Т. 16, №3. – С.64-75.

12. Шамоян Ф.А. Теплицевы операторы и вопросы факторизации в гельдеровских пространствах аналитических функций // Вестник Брянского государственного университета: точные и естественные науки. — Брянск: РИО БГУ. — 2014. — №4. — С. 34–42.
13. Shamoyan R.F., Kurilenko S.M. Analytic functions on spaces of products of Siegel domains of second type // Mathematica Montinegri. – 2014. – V. XXX. –P. 5-16.
14. Shamoyan R.F., Kurilenko S.M. On multipliers of some new analytic Hardy-type $H^p_{\vec{\gamma}}$ and Bergman-type function $H^p(\vec{\alpha})$ spaces in polydisc // Romai journal. – 2014. – V.10, №1. – P. 187-204.
15. Shamoyan R.F., Kurilenko S.M. On multipliers of some new analytic function Spaces of BMOA type in the polydisc // Boletin Asociación Matematica Venezolana. – 2014. – P. 1-16.
16. Shamoyan R.F., Povpritz E.V. Trace theorems in Bergman-type spaces in products of unbounded Siegel domains // Uzbek Mathematical Journal. – 2014. – P. 149-157.
17. Shamoyan R.F., Mihic O. Sharp trace theorems for Bergman-type space in strictly pseudoconvex domains // Reports national academy of sciences of Armenia. – 2014. – V. 114, №2. – P. 91-96.
18. Shamoyan R.F., Kurilenko S.M. On extremal problems in tubular domains over symmetric cones // Успехи анализа. – 2014. – Том 3 (21), № 1. – С. 44-65.
19. Shamoyan R.F., Kurilenko S.M. Some remarks on distances in spaces of analytic functions in bounded domains with C^2 boundary and admissible domains // Чебышевский сборник. – 2014. – Т. 15:3. – С. 114-130.
20. Беднаж В.А., Карбанович О.В., Шамоян Ф.А. О сравнении некоторых весовых классов мероморфных функций с ограничениями на характеристику Р. Неванлинны // Современные проблемы комплексного и гармонического анализа: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием / Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского. – Брянск: РИО БГУ, 2014. – С.12-15.
21. Беднаж В.А., Родикова Е.Г., Шамоян Ф.А. Кратная интерполяция и описание главных частей в разложении Лорана в классах мероморфных в круге функций со степенным ростом характеристики Р. Неванлинны // Современные проблемы комплексного и гармонического анализа: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием / Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского. – Брянск: РИО БГУ, 2014. – С.16-20.

22. Махина Н.М. Линейные непрерывные функционалы в некоторых весовых пространствах аналитических функций // Современные проблемы комплексного и гармонического анализа: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием / Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского. – Брянск: РИО БГУ, 2014. – С.31-33.
23. Повприц Е.В., Шамоян Ф.А. О теплицевых операторах в аналитических пространствах Соболева в единичном поликруге // Современные проблемы комплексного и гармонического анализа: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием / Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского. – Брянск: РИО БГУ, 2014. – С.39-41.
24. Shamoyan R., Kurilenko S. New integral operators in Bergman-type analytic spaces on semi-products of tubular domains over symmetric cones // Современные проблемы комплексного и гармонического анализа: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием / Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского. – Брянск: РИО БГУ, 2014. – С.3-7.
25. Шамоян Р.Ф., Куриленко С.М. Мультипликаторы пространств типа BMOA голоморфных в поликруге функций // Современные проблемы комплексного и гармонического анализа: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием / Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского. – Брянск: РИО БГУ, 2014. – С.43-46.
26. Шамоян Ф.А. О нулях некоторых весовых классов аналитических в круге функций // Современные проблемы комплексного и гармонического анализа: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием / Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского. – Брянск: РИО БГУ, 2014. – С.46-50.
27. Шубабко Е.Н. Корневые множества и факторизация одного класса мероморфных функций бесконечного порядка // Современные проблемы комплексного и гармонического анализа: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием / Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского. – Брянск: РИО БГУ, 2014. – С.50-53.
28. Шамоян Ф.А., Беднаж В.А., Приходько О.В. О нулях одного класса аналитических в полуплоскости функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV международной научной конференции. — Смоленск.— 2014.— С. 217-218.
29. Шамоян Ф. А., Куриленко С.М. К вопросу об ограниченности Теплицевых операторов в весовых пространствах Соболева аналитических в единичном шаре функций

// Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV международной научной конференции. – Смоленск. – 2014. – С. 213-214.

30. Шамоян Р.Ф., Куриленко С.М. Мультипликаторы пространств $H^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ и $H^{\vec{p}}(\vec{\alpha})$ аналитических функций в поликруге со смешанной нормой // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV международной научной конференции. – Смоленск. – 2014. – С. 215-216.

31. Родикова Е.Г., Шамоян Ф.А. Условие типа Бляшке для одного класса аналитических в круге функций // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 17-й международной Саратовской зимней математической школы, посвященной 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова. – Саратов. – 2014. – С. 295-296.

32. Родикова Е.Г. Факторизационное представление класса аналитических в круге функций с α- характеристикой из L^p-пространств // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения XXV». – Воронеж. – 2014. – С. 146-147.

33. Шамоян Ф.А., Повприц Е.В. Об ограниченности теплицева оператора в одном весовом анизотропном пространстве аналитических функций в поликруге // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения XXV». – Воронеж. – 2014. – С. 197-198.

34. Махина Н.М. Ортогональность некоторых систем функций в пространствах аналитических функций с весом // Известия академической науки: материалы X Международной научно-практической конференции. – Великобритания. – Т.6. – С. 3-4.

35. Шамоян Р.Ф., Куриленко С.М. О следах аналитических пространств в строго псевдо выпуклых областях с гладкой границей // Математика. Экономика. Образование: материалы XXII международной конференции. – 2014. – Ростов-на-Дону. – С. 102.

36. Шамоян Р.Ф., Куриленко С.М. Об одной экстремальной задаче в аналитических пространствах в областях из $\mathbb{C}^n$ // Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования: материалы международной научной конференции. – 2014. – Архангельск. – С. 471-473.

37. Родикова Е.Г. Факторизация, характеризация корневых множеств и вопросы интерполяции в весовых пространствах аналитических функций: автореферат диссертации на соискание степени канд. физ.-мат. наук.: 01.01.01. – Воронеж, 2014. – 16 с.

38. Шамоян Ф.А. Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой. – Брянск: РИО БГУ. – 2014. – 250 с.

39. Hartmann A. Interpolation in the Nevanlinna and Smirnov classes and harmonic majorants / A. Hartmann, X. Massaneda, A. Nicolau, P. Thomas // J. Funct. Anal. – 2004. – T. 217. – P. 1-37.
40. Seip K. Interpolating and sampling in spaces of analytic functions // University Lecture Series 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 2004. – 183 c.
41. Джрбашян М.М. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах Hp в полуплоскости // Изв. АН СССР. Сер. матем. – Т. 42:6. –1978. – С. 1322-1384.
42. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции (пер. с нем). – М.-Л.: ГИТТЛ, 1941. – 388 с.
43. Джрбашян М.М. О параметрическом представлении некоторых классов мероморфных функций в единичном круге // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 157, №5. – С. 1024-1027.
44. Джрбашян М.М. К проблеме представимости аналитических функций // Сообщ. Института матем. и механики АН Арм ССР. – 1948. – №2. – С. 3-40.
45. Шамоян Ф.А., Шубабко Е.Н. Введение в теорию весовых L^p-классов мероморфных функций.- Брянск: Группа компаний «Десяточка». – 2009. – 152 с.
46. Шамоян Ф.А. О нулевых множествах некоторых весовых классов аналитических в круге функций / Ф. А. Шамоян, В. А. Беднаж, О. В. Приходько // Вестник Брянского государственного университета: естественные и точные науки. – 2008. – №4. – С. 85-92.