

МАТЕМАТИКА

Заочный тур

2018 - 2019 г.

9 класс

Решения

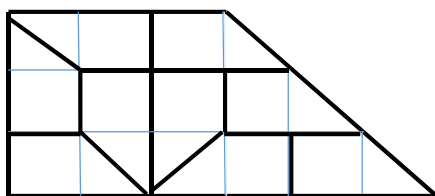
1. В 46 клетках находятся 1000 кроликов. Доказать, что в каких-то двух клетках находятся поровну кроликов (могут быть пустые клетки)

Решение

Допустим противное. Тогда общее количество кроликов будет не меньше, чем $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 45 = \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 45 = 1035 > 1000$. Следовательно, предположение неверно, а значит в каких-то двух клетках будет кроликов поровну.

2. ABCD – прямоугольная трапеция. Разделить данную трапецию на 9 равных и подобных заданной.

Решение



Есть и другие варианты. Коэффициент подобия равен $\frac{1}{3}$.

Всегда ли можно разбить прямоугольную трапецию таким образом? Обоснуйте.

3. Три колокола начинают бить одновременно. Интервалы между ударами для этих колоколов составляют $\frac{4}{3}$ секунды, $\frac{5}{3}$ секунды и 2 секунды. Совпавшие во времени удары воспринимаются за один. Сколько ударов будет услышано за 1 минуту? (Включая первый и последний).

Решение

Первый колокол за минуту сделает $60 : \frac{4}{3} + 1 = 46$ ударов. Второй и третий – соответственно 37 и 31 удар. Удары первого и второго совпадают через $\frac{20}{3}$ секунды, и всего они совпадут 10 раз. Удары первого и третьего совпадут 16 раз (интервалы 4 секунды), второго и третьего – 7 раз

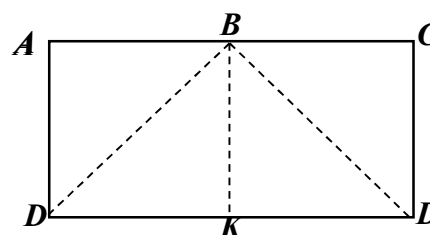
(интервалы 10 секунд) И, наконец, удары всех трех колоколов совпадут 4 раза (интервал 20 секунд) Таким образом, имеем:

$$46 + 37 + 31 - 10 - 16 - 7 + 4 = 85 \text{ ударов.}$$

Ответ: 85

4. В вершине A единичного квадрата $ABCD$ сидит муравей. Ему надо добраться до точки C , где находится вход в муравейник. Точки A и C разделяет вертикальная стена, имеющая вид равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой BD . Найти длину кратчайшего пути, который надо преодолеть муравью, чтобы попасть в муравейник.

Решение



Обозначим за K вершину прямого угла равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой BD , о котором говорится в условии. Пусть на своем пути муравей пересекает катет BK . Будем считать, что треугольник BKD представляет собой бумажную складку: линиями сгиба являются BD (дважды) и BK . Развернув эту складку, получим, что путь муравья будет наименьшим, когда на этой развертке его путь будет иметь вид прямой. Таким образом, длина кратчайшего пути равна 2 и кратчайшим является путь по сторонам квадрата в обход препятствию.

Ответ: 2

5. Не пользуясь калькулятором, выяснить, какое число больше:

$$\left| \left| \sqrt[3]{5} - \sqrt{3} \right| - \sqrt{3} \right| - \sqrt[3]{5} \text{ или } 0,01$$

Решение

Первое число равно нулю, поскольку $\sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$ ($27 > 25$). Значит оно меньше (В решении обязателен показ сравнения $\sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$)

6. Решить систему уравнений:
- $$\begin{cases} xy + zi = 14, \\ xz + yi = 11, \\ xi + yz = 10, \\ x + y + z + i = 10 \end{cases}$$

Решение

Сложим два первых уравнения, получим $(x + u) \cdot (y + z) = 25$. Принимая во внимание 4-ое уравнение $(x + u) + (y + z) = 10$, находим $(x + u)$, $(y + z)$. Они равны между собой и равны 5. Точно так же, складываем 1-ое и 3-е уравнения и учитывая 4-ое находим $(x + z)$ и $(y + u)$. Затем складывая 2-ое и 3-е уравнения и учитывая опять 4-ое уравнение находим $(x + y)$ и $(z + u)$. В итоге получим следующие ответы (в каждой четверке неизвестные указаны в следующем порядке: x, y, z, u):

Ответ: $(1, 2, 3, 4), (2, 1, 3, 4), (3, 4, 1, 2), (4, 3, 2, 1)$.