Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского
XI Брянская корпоративная региональная олимпиада учащейся молодежи

МАТЕМАТИКА
Заочный тур
2018 - 2019 г.

10-11 классы

1. На основании BC треугольника ABC взята точка D так, что BD=AC. Оказалось, что угол DAB прямой, а угол DAC втрое меньше угла ABC. Найдите градусную величину угла BAC.

Решение.

Обозначим через x величину угла DAC, тогда ABC=3x, ACB=180°-3x-(90°+x)=90°–4x. Так как ACB=90°-4x - положительный угол, то 4x<90°.

По теореме синусов, применённой к треугольнику ABC, AC/sin(3x)=AB/sin(90°–4x)=AB/cos(4x), то есть AB/AC=cos(4x)/sin(3x).

Так как угол BAD по условию прямой и AC=BD,

то AB/AC = AB/BD = cos(3x).

Таким образом,

cos(4x)/sin(3x)=cos(3x);

cos(4x)=sin(3x)cos(3x)=0,5sin(6x).

В этом равенстве слева стоит косинус, то есть функция, убывающая на промежутке от 0 до 180°, а справа - синус, то есть возрастающая на этом промежутке функция. Поэтому их графики могут пересекаться не более чем в одной точке, то есть уравнение может иметь не более одного решения. Эту точку пересечения графиков легко найти: если 6x=90°, то sin(6x)=1, 0,5sin(6x)=0,5, и одновременно cos(4x)=cos(60°)=0,5.

Таким образом, x=15° годится, а других решений (по доказанному выше) быть не может. Величина угла BAC равна 90°+15°=105°.

Ответ: 105°.

2. Введем на множестве всех положительных целых чисел операцию «*», которая любым целым положительным числам x и y сопоставляет положительное число, определённое по некоторому правилу. Операция «*» обладает свойствами: (x*y)*y = x*(y*y) и x*(x*1) = x*1, 0*1=1. Чему равно 2*0*1*8*2019?

Решение.

Операция * возвращает значение, стоящее справа от знака *, поэтому 2*0*1*8*2019=2019.

3. Найти все пары целых чисел, удовлетворяющих уравнению

$$2x^2+5=3y^2+5xy.$$

Решение.

Перепишем исходное уравнение в виде:

$$3y^2+6xy-xy-2x^2=5.$$

Разложим его на множители:

$$(3y-x)(y+2x)=5.$$

Так как число 5 – простое, то уравнение равносильно решению совокупности следующих систем:

$$\begin{cases}3y-x=1;\\ y+2x=5;\end{cases} \text{ или } \begin{cases}3y-x=-1;\\ y+2x=-5;\end{cases} \text{ или } \begin{cases}3y-x=5;\\ y+2x=1;\end{cases} \text{ или } \begin{cases}3y-x=-5;\\ y+2x=-1.\end{cases}$$

Так как решением являются целые числа, то получаем две пары –

(2,1) и (-2, -1).

4. Труэль – это дуэль на троих. Участники стреляют по очереди. Труэль начинает самый слабый участник, последним стреляет самый сильный в случае, если останется жив. Известно, что вероятность попасть в цель для первого стрелка равна 1/3, для второго – 1/2, а третий участник труэли стреляет без промаха. Труэль продолжается до тех пор, пока в живых не останется один участник. Труэлянты могут стрелять в любого противника по выбору. Какова оптимальная стратегия для первого стрелка: в кого он должен выстрелить?

Решение.

Занумеруем участников труэли: 1, 2, 3. Проанализируем выбор цели, который предстоит сделать первому, слабому слабому стрелку 1. Во-первых, если 1 стреляет в 2 и попадает в цель, то право следующего выстрела перейдет к 3, самому сильному участнику труэли. У него останется единственный противник — 1, а поскольку 3 стреляет без промаха, то 1 после выстрела погибнет.

Для 1 лучше, если он прицелится в 3. Если он попадает в цель, то право следующего выстрела перейдет к 2. И поскольку 2 попадает в цель только в одном случае из двух, то у 1 есть шанс остаться в живых, произвести ответный выстрел в 2 и, возможно, выиграть труэль.

На первый взгляд кажется, что следует остановить свой выбор на втором варианте труэли. Однако существует третий, еще лучший выбор.

Участник 1 может выстрелить в воздух. Право следующего выстрела переходит к 2, который стреляет в 3 как более опасного оппонента. Если 3 остается в живых, то он стреляет в 2 как более опасного противника. Стреляя в воздух, 1 предоставляет 2 исключить 3.

Третий вариант — наилучшая стратегия для 1, так как 2 или 3 в конечном счете погибает, после чего 1 стреляет в того из них, кто остается жив. Выстрелом в воздух 1 изменяет ситуацию: вместо первого выстрела в труэли он производит первый выстрел в дуэли.

5. При каких значениях параметра ***a*** сумма $\log_a \frac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ и $\log_a \frac{4+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ не равна единице ни при каких значениях **x?**

Решение. Составим сумму и запишем условие:

$$\log_a \frac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \log_a \frac{4+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \neq 1.$$

Это условие равносильно тому, что уравнение

$$\log_a \frac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \log_a \frac{4+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1$$

не имеет решений при любых значениях **x**.

$$x \geq 0, a > 0, a \neq 1$$

Преобразуя наше уравнение, получим равносильное уравнение

$$\frac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{4+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = a,$$

$$\left(3+2\sqrt{x}\right)\left(4+3\sqrt{x}\right) = a\left(1+\sqrt{x}\right)^2,$$

$$(6-a)x + (17-2a)\sqrt{x} + 12 - a = 0.$$

Пусть $\sqrt{x} = y, \quad y \geq 0.$ Имеем квадратное уравнение

$$\mathbf{(6 - \mathit{a})\, y^2 + (17 - 2\mathit{a})\, y + 12 - \mathit{a} = 0. \ (1)}$$

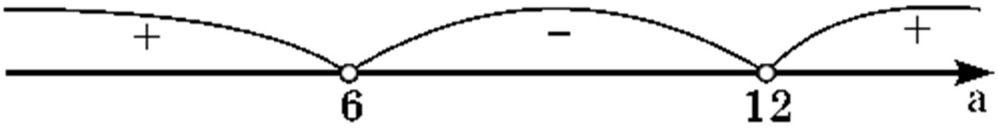
$$\mathbf{D = (17 - 2\mathit{a}^2) - 4(6 - \mathit{a})\,(12 - \mathit{a}) = 4\mathit{a} + 1}.$$

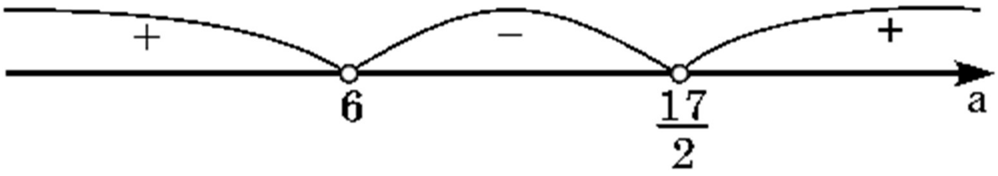
Так как $\boldsymbol{a > 0}$, то $\mathbf{D > 0}$ и квадратное уравнение (1) имеет два корня. Учитывая условие $y \geq 0$, имеем $\mathbf{y_1<0}$ **и** $\mathbf{y_2<0}$, то есть $\mathbf{y_1y_2>0}$**,** $\mathbf{y_1+y_2<0}$.

$$y_1y_2 = \frac{12-a}{6-a}, \; y_1 + y_2 = \frac{2a-17}{6-a}.$$

Значит,

$$\begin{cases} \dfrac{12-a}{6-a} > 0, \\ \dfrac{2a-17}{6-a} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{a-12}{a-6} > 0, \\ \dfrac{a-\dfrac{17}{2}}{a-6} > 0. \end{cases}$$





С учетом условия $a > 0, a \neq 1$, имеем $a \in (0;1) \cup (1;6) \cup (12;+\infty)$.

Рассмотрим отдельно случай ***a*=6**. Тогда квадратное уравнение становится линейным: **5y + 6 = 0**, то есть $y = -\dfrac{6}{5}$, что не удовлетворяет условию $y \geq 0$.

Ответ: при $a \in (0;1) \cup (1;6] \cup (12;+\infty)$.

6. Функция $f(x)$, определенная при всех действительных x является четной. Кроме этого $f(x) + f(10-x) = 4$;

а) Приведите пример такой функции, отличной от константы.

б) Докажите, что любая такая функция является периодической.

Решение.

а) Например, $f(x) = 2 + \cos\left(\dfrac{\pi x}{10}\right)$. Четность условия очевидна, проверим выполнимость второго условия:

$$f(x) + f(10-x) = 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 2 + \cos\left(\frac{\pi(10-x)}{10}\right) = 4 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi x}{10}\right) = 4$$

б) Из четности получаем, $f(10-x) = f(x-10)$, т.е. $f(x) + f(x-10) = 4$ при любом **x.** Подставив сюда $x+10, x+20$ вместо x, получаем $f(x+10) + f(x) = 4,\ f(x+20) + f(x+10) = 4.$ Вычитая из второго равенства первое, получаем $f(x+20) - f(x) = 0$ при любом **x,** т.е. функция периодична с периодом 20.

7. Решите уравнение

$$\arcsin x - \arccos\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Решение.

ОДЗ: $-1 \le x \le 1$. Обозначим $\arcsin x = u, \arccos\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) = v.$ Тогда исходное уравнение запишем в виде

$$\begin{cases} \sin u + \sqrt{3}\cos v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ u - v = -\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Отсюда $\cos\left(v - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Решая последнее уравнение, получим

$v_1 = \frac{\pi}{3}, v_2 = 0 \Rightarrow u_1 = 0, v_2 = -\frac{\pi}{3}.$

Беря синус от u, получаем $x_1 = 0, x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$